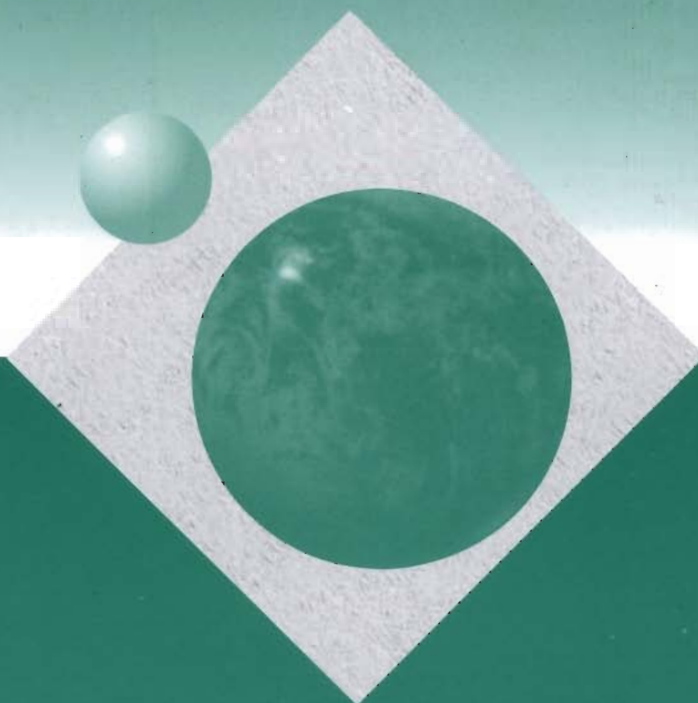
CƠ HỌC VẬT RẮN



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HACHETTE
Supérieur

"Cuốn sách này được xuất bản trong khuôn khổ Chương trình Đào tạo Kĩ sư Chất lượng cao tại Việt Nam, với sự trợ giúp của Bộ phận Văn hóa và Hợp tác của Đại Sứ quán Pháp tại nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam".

"Cet ouvrage, publié dans le cadre du Programme de Formation d'Ingénieurs d'Excellence au Vietnam bénéficie du soutien du Service Culturel et de Coopération de l'Ambassade de France en République socialiste du Vietnam".

194 – 2006/CXB/9 – 323/GD Mã số: 7K475T6 – DAI

Cơ học vật rắn

(Tái bản lần thứ hai)

JEAN - MARIE BRÉBEC
Giáo sư giảng dạy các lớp Dự bị đại học
trường Lixê Saint - Louis ở Paris

JEAN - NOËL BRIFFAUT
Giáo sư giảng dạy các lớp Dự bị đại học
trường Lixê Descartes ở Tours

PHILIPPE DENÈVE
Giáo sư giảng dạy các lớp Dự bị đại học
trường Lixê Henri - Wallon ở Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Sainte - Marie - Fénelon ở Paris

ALAIN FAVIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

MARC MÉNÉTRIER
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Thiers ở Marseilles

BRUNO NOËL
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Champollion ở Grenoble

CLAUDE ORSINI
Giáo sư giảng dạy các lớp dự bị đại học
trường Lixê Dumont - d'Urville ở Toulon

Năm thứ hai

MP -M P*-PC
PC*-PT-PT*

Người dịch : NGUYỄN XUÂN CHÁNH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Mécanique du solide

JEAN - MARIE BRÉBEC
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Saint - Louis à Paris

JEAN - NOËL BRIFFAUT
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Descartes à Tours

PHILIPPE DENÈVE
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Henri - Wallon à Valenciennes

THIERRY DESMARAIS
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Sainte - Marie - Fénelon à Paris

ALAIN FAVIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

MARC MÉNÉTRIER
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Thiers à Marseilles

BRUNO NOËL
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Champollion à Grenoble

CLAUDE ORSINI
Professeur en Classes Préparatoires
au Lycée Dumont - d'Urville à Toulon

2de année

MP-MP*-PC
PC*-PT-PT*

HACHETTE
Supérieur

Lời nói đầu

Bộ giáo trình này viết theo chương trình mới của các lớp dự bị vào các trường Đại học, được áp dụng cho kì tựu trường tháng 9/1995 đối với các lớp năm thứ nhất MPSI, PCSI và PTSI, cho kì tựu trường tháng 9/1996 đối với các lớp năm thứ hai MP, PC, PSI.

Theo tinh thần của chương trình mới, bộ giáo trình này thực hiện một sự đổi mới giảng dạy vật lí ở các lớp dự bị đại học.

• Có một truyền thống đã khá ăn sâu, đó là vật lí được xem như là sản phẩm thứ yếu của Toán, các hiện tượng vật lí che lấp bởi các tính toán. Trái với điều đó, ở giáo trình này các tác giả đã đưa toán về đúng vị trí của nó, đã ưu tiên cách tư duy và lí luận vật lí và nhấn mạnh các tham số có ý nghĩa, nhấn mạnh hệ thức liên kết các tham số lại với nhau .

• Vật lí là một khoa học thực nghiệm và phải được giảng dạy theo tinh thần đó. Các tác giả quan tâm đặc biệt đến việc mô tả các thiết bị thí nghiệm, không bỏ qua tầm quan trọng của thực hành. Mong rằng những cố gắng của các tác giả sẽ thúc đẩy thày và trò cải tiến hoặc tạo ra những hoạt động thí nghiệm sáng tạo.

• Vật lí không phải là một khoa học thoát li chỉ chú trọng đến biện luận tư duy mà tách rời với thực tế kĩ thuật. Mỗi khi chủ đề đã khá sát, các tác giả đã dành nhiều chỗ để trình bày những áp dụng khoa học hay công nghệ, đặc biệt là để kích thích các nhà nghiên cứu và kĩ sư tương lai.

• Vật lí không phải là một khoa học bất khả xâm phạm và vĩnh hằng, đó là sản phẩm của một thời và không tách ra khỏi phạm vi hoạt động của con người.

Các tác giả đã chú trọng tham khảo lịch sử khoa học để mô tả diễn tiến của các mô hình lí thuyết cũng như đưa thí nghiệm trở lại với hoàn cảnh của chúng.

Nhóm các tác giả mà Jean-Marie BRÉBEC phối hợp gồm các giáo sư các lớp dự bị có nhiều kinh nghiệm, đã tham gia chấm nhiều kì thi tuyển vào các trường đại học và năng lực khoa học của nhóm này được nhất trí công nhận. Nhóm này quan hệ mật thiết với các tác giả của bộ giáo trình của DURANDEAU và DURUPTHY cho vòng hai các lớp trung học (tương đương trung học phổ thông của Việt Nam) ; như vậy bộ giáo trình cho các lớp dự bị đã kế tiếp hoàn hảo các giáo trình trung học về hình thức cũng như ý tưởng.

Chắc chắn rằng công trình này là những công cụ quý báu cho sinh viên để chuẩn bị có hiệu quả cho các kì thi tuyển, cũng như để nắm được kiến thức khoa học vững chắc.

J.P. DURANDEAU

Sau khi nghiên cứu các yếu tố động học của một hệ chất điểm (đối với sinh viên PC và PC*, là nhắc lại) giáo trình đề cập đến trường hợp rất quan trọng của vật rắn làm rõ chi tiết về momen quán tính của vật rắn đối với một trục.

Các định luật động lực học (không quên nghiên cứu về năng lượng) được áp dụng cho tất cả các hệ chất điểm, đặc biệt cho vật rắn.

Các lực, hay là các tác động tiếp xúc và các định luật về ma sát (rất có ích đối với sinh viên PT vì những điều này không được nêu rõ trong chương trình) được nghiên cứu chi tiết và như vậy là có cả một chương nói về chuyển động vật rắn quanh một trục cố định.

Các bài tập (hoặc tình huống) cổ điển luôn luôn được trình bày dưới dạng những áp dụng hay là những bài tập có lời giải.

Cuối giáo trình có nhiều bài tập điển hình, trích từ những bài tập viết khi thi tuyển vào các trường Đại học phù hợp với chương trình hiện nay và có bài giải. Các bài tập này vận dụng tất cả những kết quả của chương trình cơ và cũng cho phép sinh viên kiểm tra kiến thức của mình.

Mục lục

ĐỘNG HỌC CỦA CÁC HỆ CHẤT

1

Mở đầu

Động học được hình thành từ chuyển động học bằng cách đưa thêm khái niệm về khối lượng: đối tượng của động học là nghiên cứu chuyển động của các khối lượng, không đề cập đến nguyên nhân gây nên chuyển động. Chúng ta trình bày ở chương này các định lý KŒNIG (Paul Savier Gabriel KŒNIG, sinh ở Toulouse năm 1858, mất ở Paris năm 1931, nguyên là sinh viên Cao đẳng sư phạm Paris và là giáo sư cơ học ở Sorbonne). Các định lý này cho phép xác định dễ dàng các yếu tố động học của một hệ chất bất kỳ (biến dạng hay không biến dạng) và chúng tôi sẽ hướng dẫn để sử dụng trong nhiều bài toán.

Chương này là ôn lại đối với các học viên PCSI; trái lại đối với học viên MPSI và PTSI những khái niệm ở đây là mới.

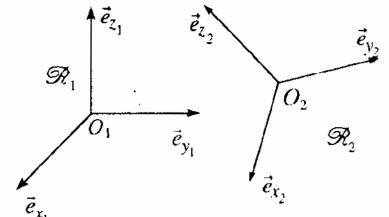
MỤC TIÊU

- Quán tâm, quy chiếu trọng tâm.
- Tổng động lượng và động lực, momen động lượng và động lực.
- Động năng của một hệ chất.
- Các định lý KŒNIG.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động học và động lực học chất điểm.

1 Nhắc lại : thành phần của vận tốc và gia tốc



H.1. *Chuyển động tương đối của hai hệ quy chiếu.*

Ta xét hai hệ quy chiếu $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ dịch chuyển đối với nhau và ký hiệu $(O_1; \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ và $(O_2; \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ hai hệ tọa độ Descartes gắn liền tương ứng với $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ (*h*.1).

1.1. Chuyển động tương đối của hai hệ quy chiếu

1.1.1. Vectơ quay

Trong $\mathcal{R}_1$, gốc O_2 và các vectơ đơn vị $\vec{e}_{x_2}$, $\vec{e}_{y_2}$ và $\vec{e}_{z_2}$ thay đổi tuân theo các tính chất:

$$\vec{e}_{x_2}^{\,2} = \vec{e}_{y_2}^{\,2} = \vec{e}_{z_2}^{\,2} = 1 \text{ và } \vec{e}_{x_2}.\vec{e}_{y_2} = \vec{e}_{y_2}.\vec{e}_{z_2} = \vec{e}_{z_2}.\vec{e}_{x_2} = 0$$

Trong $\mathcal{R}_1$, lấy đạo hàm các hệ thức trên theo thời gian, ta có:

$$\vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{e}_{y_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{e}_{z_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = 0\,;$$

$$\vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{e}_{y_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = 0\,;$$

$$\vec{e}_{y_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{e}_{z_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = 0\,;$$

$$\vec{e}_{z_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = 0\,.$$

Đặt :

$$\Omega_{x_2}(t) = \vec{e}_{z_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1},\quad \Omega_{y_2}(t) = \vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} \text{ và } \Omega_{z_2}(t) = \vec{e}_{y_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1},$$

Ta đưa vào vectơ :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} = \Omega_{x_2}(t)\vec{e}_{x_2} + \Omega_{y_2}(t)\vec{e}_{y_2} + \Omega_{z_2}(t)\vec{e}_{z_2}$$

Và ta có thể viết: $\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{x_2}$,

$$\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{y_2} \text{ và } \left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{e}_{z_2}.$$

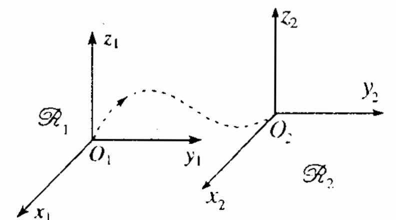
Vectơ $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}$, được gọi là **vectơ quay kéo theo** của $\mathcal{R}_2$ so với $\mathcal{R}_1$, vectơ đó đặc trưng cho sự quay của $\mathcal{R}_2$ so với $\mathcal{R}_1$.

1.1.2. Trường hợp tịnh tiến đối với nhau

Vectơ quay bằng không : $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} = \vec{0}$; do đó các vectơ $\vec{e}_{x_2}$, $\vec{e}_{y_2}$ và $\vec{e}_{z_2}$ và nói chung là các vectơ gắn với $\mathcal{R}_2$ là không đổi trong $\mathcal{R}_1$.

Tốc độ $\vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_1}$ đặc trưng cho sự tịnh tiến của $\mathcal{R}_2$ đối với $\mathcal{R}_1$ (*h*.2).

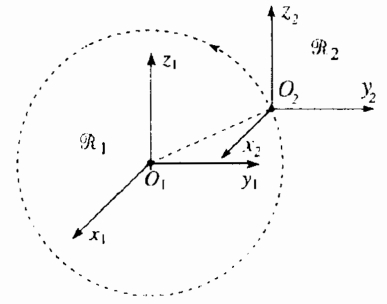
Chú ý rằng phép tịnh tiến của $\mathcal{R}_2$ không bắt buộc phải thẳng và quỹ đạo của điểm O_2 là bất kỳ (quỹ đạo này thậm chí có thể là một vòng tròn: $\mathcal{R}_2$ lúc đó là tịnh tiến tròn đối với $\mathcal{R}_1$ (*h*.3)).



H.2. *$\mathcal{R}_2$ tịnh tiến một cách bất kỳ nào đó đối với $\mathcal{R}_1$.*

1.1.3. Trường hợp quay tương đối quanh một trục cố định

Ta có thể chọn các trục (Oz_1) và (Oz_2) sao cho chúng trùng với trục quay. Khi đó ta có thể nghiệm thấy rằng vectơ quay kéo theo được viết ra là $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} = \dot{\theta}\vec{e}_{z_1}$ với θ kí hiệu là góc chung: $\theta = (\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Ox_2}) = (\overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oy_2})$ (h.4).



H.3. $\mathscr{R}_2$ tịnh tiến tròn đối với $\mathscr{R}_1$.

1.1.4. Trường hợp tổng quát

Tổng quát hơn, chuyển động tương đối của hệ quy chiếu $\mathscr{R}_2$ đối với hệ quy chiếu $\mathscr{R}_1$ có thể phân tích thành một chuyển động tịnh tiến đặc trưng bởi tốc độ $\vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1}$ và một chuyển động quay xác định bởi vectơ quay $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1}$, mà phương hướng có thể thay đổi theo thời gian.

1.2. Đạo hàm của một vectơ trong $\mathscr{R}_1$ và trong $\mathscr{R}_2$

Ta xét một vectơ $\vec{U}(t)$ là hàm của thời gian và ta xét quan hệ giữa các đạo hàm $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1}$ và $\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_2}$ của vectơ $\vec{U}$ tương ứng trong $\mathscr{R}_1$ và $\mathscr{R}_2$.

Để làm việc đó, ta biểu diễn $\vec{U}$ theo cơ sở $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$:

$$\vec{U} = U_{x_2}\vec{e}_{x_2} + U_{y_2}\vec{e}_{y_2} + U_{z_2}\vec{e}_{z_2}$$

Và ta lấy đạo hàm biểu thức trên trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_1$:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \frac{dU_{x_2}}{dt}\vec{e}_{x_2} + \frac{dU_{y_2}}{dt}\vec{e}_{y_2} + \frac{dU_{z_2}}{dt}\vec{e}_{z_2} + U_{x_2}\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} + U_{y_2}\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} + U_{z_2}\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1}.$$

Ba số hạng đầu là đạo hàm của vectơ $\vec{U}$ trong $\mathscr{R}_2$ và ta có thể viết tổng ba số hạng cuối dưới dạng:

$$\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \left(U_{x_2}\vec{e}_{x_2} + U_{y_2}\vec{e}_{y_2} + U_{z_2}\vec{e}_{z_2}\right) = \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \vec{U}.$$

Từ đấy ta có:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \vec{U}.$$

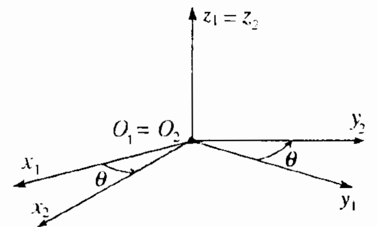
1.3. Sự hợp thành các vận tốc

Ta xét quan hệ giữa các vận tốc $\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1}$ và $\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_2}$ của một điểm động M tương ứng trong $\mathscr{R}_1$ và $\mathscr{R}_2$.

Sử dụng các kết quả trước, ta có thể viết:

$$\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

vậy : $\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2}$



H.4. $\mathscr{R}_2$ *chuyển động quay quanh trục cố định* (Oz_1) *trong* $\mathscr{R}_1$.

Tốc độ của điểm M trong $\mathscr{R}_1$ được viết ra là:

$$\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{v}_e(M) + \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2},$$

ở đây $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$ **là tốc độ kéo theo của điểm M.**

Tốc độ kéo theo của điểm M diễn tả tốc độ của điểm $M_{\mathscr{R}_2}$ cố định trong $\mathscr{R}_2$ điểm này trùng hợp ở thời điểm t với điểm M : điểm $M_{\mathscr{R}_2}$ được gọi là điểm trùng hợp :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_{\mathscr{R}_2})_{/\mathscr{R}_1}.$$

Cần chú ý rằng các điểm M và $M_{\mathscr{R}_2}$ chỉ trùng hợp vào thời điểm t ; ở một thời điểm trước đó M trùng hợp với một điểm khác của $\mathscr{R}_2$ và như vậy người ta phải xác định ở mỗi thời điểm t một điểm trùng hợp.

1.4. Sự hợp thành của gia tốc

Lấy đạo hàm các biểu thức của vận tốc ở §**1.3** để có các hệ thức giữa các gia tốc $\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\dfrac{d\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1}$ và $\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_2} = \left(\dfrac{d\vec{v}(M)_{\mathscr{R}_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_2}$ ở $\mathscr{R}_1$ và $\mathscr{R}_2$ tương ứng, ta được :

$$\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \left(\frac{d\vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} + \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1},$$

với $\left(\dfrac{d\vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{a}(O_2)_{/\mathscr{R}_1}$, $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$

và $\left(\dfrac{d\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2}$.

Ta suy ra :

$$\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{a}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right) + 2\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2} + \vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_2}.$$

Gia tốc của *điểm trùng hợp* $M_{\mathscr{R}_2}$ được gọi là *gia tốc kéo theo*, có biểu thức là:

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_2} = \vec{a}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right).$$

Ở hệ thức trên đây, ngoài các gia tốc $\vec{a}_e(M)$ và $\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_2}$ còn có số hạng phụ gọi là *gia tốc* CORIOLIS hay *gia tốc phụ :*

$$\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2}.$$

Gia tốc của điểm M trong $\mathscr{R}_1$ được viết ra là:

$$\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_2},$$

ở đây $\vec{a}_e$ là gia tốc kéo theo và $\vec{a}_C$ là gia tốc CORIOLIS:

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_2}.$$

Chú ý rằng gia tốc kéo theo không phải là đạo hàm của tốc độ kéo theo.

1.5. Trường hợp các chuyển động đặc biệt của $\mathscr{R}_2$ đối với $\mathscr{R}_1$

1.5.1. $\mathscr{R}_2$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathscr{R}_1$

Trong trường hợp này, ta có :

$\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} = \vec{0}$; $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1}$; $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2)_{/\mathscr{R}_1}$; $\vec{a}_C(M) = \vec{0}$.

Nếu $\mathscr{R}_2$ chuyển động tịnh tiến đối với $\mathscr{R}_1$, tốc độ kéo theo và gia tốc kéo theo không phụ thuộc vào vị trí của điểm chuyển động M. Gia tốc CORIOLIS bằng không.

Đây là một kết quả quan trọng mà về sau ta hay sử dụng.

1.5.2. $\mathscr{R}_2$ quay quanh một trục cố định của $\mathscr{R}_1$

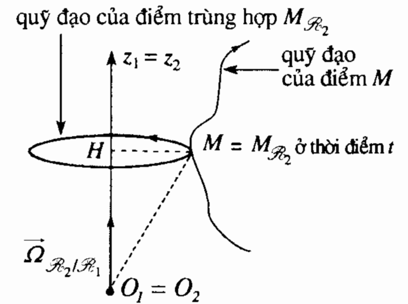
Giống như phần trước, ta giả thiết rằng phép quay thực hiện quanh một trục chung $(O_1z_1) = (O_2z_2)$ với vận tốc góc $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_2/\mathscr{R}_1} = \dot{\theta}\vec{e}_{z_1}$.

Điểm trùng hợp $M_{\mathscr{R}_2}$ vạch nên một quỹ đạo tròn tâm H, đó là hình chiếu của điểm M lên trên trục quay ở thời điểm t (h.5).

Trong trường hợp này, ta có:

$$\vec{v}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{0}; \qquad \vec{v}_e(M) = \dot{\theta}\vec{e}_{z_1} \wedge \overrightarrow{HM};$$

$$\vec{a}(O_2)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{0}; \qquad \vec{a}_e(M) = \ddot{\theta}\vec{e}_{z_1} \wedge \overrightarrow{HM} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{HM}.$$



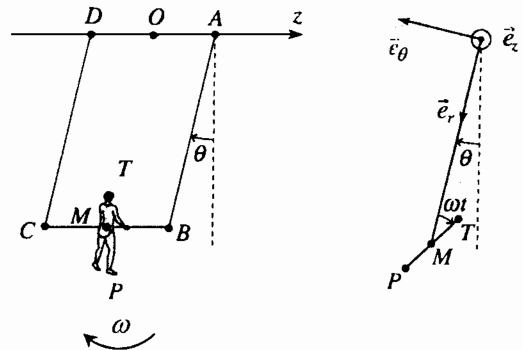
H.5. *Các quỹ đạo của điểm M và của điểm trùng hợp $M_{\mathscr{R}_2}$.*

Áp dụng 1

Chuyển động của một người chơi xà treo.

Một cái xà treo ABCD thực hiện các dao động hình sin $\theta = \theta_0 \sin\omega t$. Người chơi xà treo tương tự như thanh TMP, quay quanh AB với tốc độ tương đối ω không đổi so với cái xà treo. Ở thời điểm ban đầu, người chơi xà treo ở tư thế thẳng đứng, đầu T hướng lên trên. Các ký hiệu như vẽ ở hình 6.

Xác định đối với điểm P (chân của người chơi xà treo) tại thời điểm $t = \frac{\pi}{\omega}$, gia tốc trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_2$ gắn liền với cái xà treo, gia tốc CORIOLIS, gia tốc kéo theo và gia tốc trong hệ quy chiếu trái đất $\mathscr{R}_1$.



H.6. *Chuyển động của người chơi xà treo.*

Cho biết : $OM = AB = DC = b$ và $MP = d$.

Hệ quy chiếu $\mathscr{R}_2(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ gắn liền với xà treo quay quanh trục (Oz) cố định trong hệ quy chiếu trái đất $\mathscr{R}_1$. Chúng ta chiếu các vectơ khác nhau lên trên cơ sở $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ và chúng ta đang ở một thời điểm t nào đó.

Trong $\mathscr{R}_2$, P thực hiện chuyển động quay đều quanh M với tốc độ góc ω không đổi, từ đó:

$$\vec{v}(P)_{/\mathscr{R}_2} = \omega \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} -\omega d \sin\omega t \\ \omega d \cos\omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}(P)_{/\mathscr{R}_2} = -\omega^2 \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} -\omega^2 d \cos\omega t \\ -\omega^2 d \sin\omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

Gia tốc CORIOLIS được xác định bởi:

$$\vec{a}_C(P) = 2\dot{\theta}\vec{e}_z \wedge \vec{v}(P)_{/\mathscr{R}_2}$$

$$= \begin{vmatrix} -2\theta_0\omega^2 d \cos^2\omega t \\ -2\theta_0\omega^2 d \cos\omega t \sin\omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

Gia tốc kéo theo bằng:

$$\vec{a}_e(P) = \ddot{\theta}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OP} - \dot{\theta}^2 \overrightarrow{OP}$$

$$= \begin{vmatrix} \theta_0\omega^2(d\sin^2\omega t \\ \quad -\theta_0(b + d\cos\omega t)\cos^2\omega t) \\ \theta_0\omega^2(-(b + d\cos\omega t)\sin\omega t \\ \quad -\theta_0 d \sin\omega t \cos^2\omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ở thời điểm t xác định theo $\omega t = \pi$ (chân P ở trên cao) ta có:

$$\vec{a}(P)_{/\mathscr{R}_2} = \omega^2 d\vec{e}_r,$$

$$\vec{a}_C(P) = 2\theta_0\omega^2 d\vec{e}_r,$$

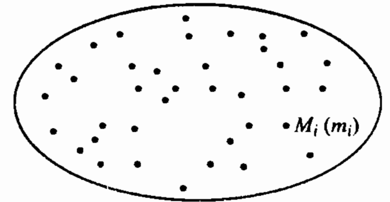
$$\vec{a}_e(P) = -\theta_0^2\omega^2(b - d)\vec{e}_r,$$

Từ đó ta suy ra gia tốc của P ở hệ quy chiếu mặt đất $\mathscr{R}_1$:

$$\vec{a}(P)_{/\mathscr{R}_1} = \vec{a}(P)_{/\mathscr{R}_2} + \vec{a}_C(P) + \vec{a}_e(P)$$

$$= \omega^2(d + 2\theta_0 d - \theta_0^2(b - d)\vec{e}_r.$$

2 Khối lượng và quán tâm (tâm quán tính) của một hệ chất - Hệ quy chiếu trọng tâm



H.7. *Hệ các chất điểm.*

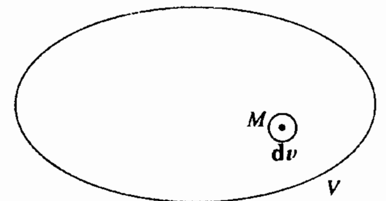
2.1. Khối lượng của một hệ

Khối lượng m của một hệ chất bằng tổng khối lượng của các phần tử tạo nên hệ. Nếu hệ gồm có những chất điểm khối lượng m_i ($h.7$) :

$$m = \sum_i m_i$$

Nếu hệ là chất phân bố liên tục theo thể tích, ở mỗi điểm M của hệ có khối lượng riêng $\rho(M)$ sao cho một phần tử thể tích dv bao quanh điểm M có khối lượng dm = $\rho(M)dv$; lúc đó thì khối lượng tổng cộng m là ($H.8$):

$$m = \iiint_V \rho(M)dv.$$



H.8. *Hệ chất thể tích.*

Hệ được gọi là đồng nhất khi khối lượng riêng ρ là không đổi và độc lập với M.

Chúng ta cũng có thể gặp những hệ có chất phân bố liên tục:

- trên bề mặt ($h.9$): khi đó ta định nghĩa khối lượng riêng bề mặt $\sigma(M)$:

$$m = \iint_S \sigma(M)\mathrm{d}s;$$

- dạng sợi dây ($h.10$): lúc đó ta định nghĩa khối lượng riêng tuyến tính $\lambda(M)$ và:

$$m = \int_L \lambda(M)dl.$$

H.9. *Hệ chất bề mặt.*

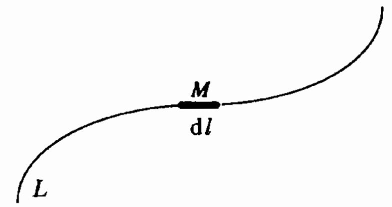
Một hệ cũng có thể gồm có nhiều phần, mỗi phần thuộc về một trong những dạng định nghĩa nói trên.

Trong các phần tiếp theo của chương này ta dùng ký hiệu $\sum_i$ để biểu diễn một tổng (gián đoạn hay liên tục).

Vậy, $\sum_i m_i$ có thể là ký hiệu của:

$$\iiint_V \rho(M)d\tau \quad \text{hay} \quad \iint_S \sigma(M)\mathrm{d}s \quad \text{hay} \quad \int_L \lambda(M)\mathrm{d}l$$

Ta nhớ rằng khối lượng của *hệ kín* được bảo toàn theo thời gian.



H.10. *Dây chất.*

2.2. Quán tâm

Ta xét một hệ chất $\mathscr{S}$ kín bao gồm những điểm M_i có khối lượng m_i.

Quán tâm G (hay là khối tâm, trọng tâm) của hệ $\mathscr{S}$ là trọng tâm của các điểm M_i có khối lượng m_i.

Như vậy, gọi O là một điểm tùy ý, ta có:

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i},$$

và nếu ta chọn O ở G thì:

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

Quán tâm có *tính kết hợp:* quán tâm G của một hệ $\mathscr{S}$ bao gồm hai hệ $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$ có khối lượng m_1 và m_2 và quán tâm G_1 và G_2 được xác định bởi:

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}$$

Khi một hệ là thuần nhất và có một phần tử đối xứng (mặt đối xứng, trục đối xứng...) khối tâm G nằm trên phần tử đối xứng đó.

Vậy khối tâm :

- của một thanh thuần nhất nằm ở giữa thanh.
- của một quả cầu thuần nhất nằm ở tâm quả cầu.

2.3. Hệ quy chiếu trọng tâm

Chuyển động của hệ $\mathscr{S}$ được nghiên cứu trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$.

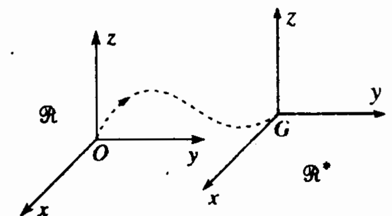
Người ta gọi hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$ đối với hệ quy chiếu $\mathscr{R}$, là hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}(G)_{/\mathscr{R}}$ đối với $\mathscr{R}$.

Để thuận tiện, hệ tọa độ gắn với $\mathscr{R}^*$ sẽ chọn gốc ở G. Các vectơ đơn vị của hệ $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ là không đổi trong $\mathscr{R}$, như vậy ta có thể lấy đồng tuyến với những vectơ đơn vị của hệ tọa độ gắn với $\mathscr{R}$ (*h.*11).

Trong trường hợp này phép tổng hợp vận tốc và gia tốc cho ta:

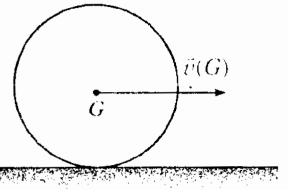
- $\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \vec{v}(G)_{/\mathscr{R}} + \vec{v}(M)^*$, ở đây ký hiệu $\vec{v}(M)^* = \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}^*}$;
- $\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \vec{a}(G)_{\mathscr{R}} + \vec{a}(M)^*$, ở đây ký hiệu $\vec{a}(M)^* = \vec{a}(M)_{/\mathscr{R}^*}$.

Tất cả các vectơ gắn với $\mathscr{R}^*$ là không đổi trong $\mathscr{R}$.



H.11. *Hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$ là tịnh tiến đối với hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathscr{R}$.*

3 Tổng động lượng và momen động lượng của một hệ chất



H.12. *Quán tâm của một cái vòng.*

3.1. Tổng động lượng

3.1.1. Định nghĩa

Các điểm M_i cấu tạo nên hệ $\mathcal{S}$, chuyển động với vận tốc $\vec{v}_i$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$. *Tổng động lượng* $\vec{P}$ của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$ bằng tổng cộng động lượng của các điểm cấu tạo nên $\mathcal{S}$:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i .$$

Chúng ta có thể biến đổi hệ thức trên bằng cách đưa vào quán tâm G của hệ $\mathcal{S}$; ta có:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{OG}\right) = m\vec{v}(G) .$$

Từ đây ta có một kết quả rất quan trọng:

Tổng động lượng của một hệ chất trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ bằng động lượng trong $\mathcal{R}$ của một chất điểm giả định ở tại quán tâm G có khối lượng là tổng cộng khối lượng của hệ $\mathcal{S}$:

$$\vec{P} = m\vec{v}(G) .$$

Chú ý:

Cần chú ý tính chất giả định của chất điểm nằm ở G. Ta xét một cái vòng thuần nhất lăn trên một mặt nằm ngang: khối tâm G rõ ràng là tâm của vòng tròn và tất nhiên là không có chất gì ở G cả (h.12).

3.1.2. Tổng động lượng trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$

Theo định nghĩa, điểm G là cố định trong $\mathcal{R}^*$, $\vec{v}(G)^* = \vec{0}$ và tổng động lượng $\vec{P}^*$ của hệ $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}^*$ bằng không:

$$\vec{P}^* = \vec{0} .$$

Điều này cho phép ta đưa ra một định nghĩa tổng quát hơn cho hệ quy chiếu trọng tâm.

Hệ quy chiếu trọng tâm đối với một hệ chất là hệ quy chiếu mà trong đó tổng động lượng của hệ chất bằng không.

3.2. Momen động lượng

3.2.1. Định nghĩa

Momen động lượng $\vec{L}_O$ đối với điểm O của hệ $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ bằng tổng momen động lượng của tất cả các điểm tạo nên hệ $\mathcal{S}$.

$$\vec{L}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}_i$$

▶ **Để tập luyện: BT 1, 2 và 4.**

3.2.2. Định lý KŒNIG đối với momen động lượng

Ta thử tìm mối liên hệ giữa momen động lượng $\vec{L}_O$ đối với O của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$ và momen động lượng $\vec{L}_G^* = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i\vec{v}_i^*$ đối với G của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}^*$.

Dùng luật tổng hợp vận tốc và không quên rằng tốc độ kéo theo của các điểm M_i không phụ thuộc chỉ số i: $\vec{v}_e(M_i) = \vec{v}(G)$, ($\mathcal{R}^*$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}$):

$$\vec{L}_O = \sum_i (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i) \wedge m_i(\vec{v}(G) + \vec{v}_i^*)$$
$$= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}(G)\sum_i m_i + \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i\vec{v}_i^* + \overrightarrow{OG} \wedge \sum_i m_i\vec{v}_i^* + \left(\sum_i m_i\overrightarrow{GM}_i\right) \wedge \vec{v}(G).$$

Hai số hạng cuối cùng rõ ràng là bằng không và số hạng thứ hai là momen động lượng đối với G của $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu trọng tâm.

Từ đây chúng ta suy ra định lý KŒNIG đối với momen động lượng.

Momen động lượng đối với O của hệ chất $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là bằng tổng của:

- **momen động lượng đối với O của một chất điểm giả định đặt ở G có khối lượng bằng khối lượng tổng cộng của hệ trong $\mathcal{R}$;**
- **momen động lượng đối với G của hệ $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu trọng tâm của nó (nghĩa là trong chuyển động của nó quanh G);**

vậy:

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}_G^*$$

▶ **Để luyện tập: BT 3 và 5.**

3.2.3. Momen động lượng trọng tâm

Nếu A là một điểm bất kỳ nào đó, ta có thể viết trong $\mathcal{R}^*$:

$$\vec{L}_A^* = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\vec{v}_i^* = \sum_i (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}_i) \wedge m_i\vec{v}_i^*$$
$$= \overrightarrow{AG} \wedge \sum_i m_i\vec{v}_i^* + \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i\vec{v}_i^*.$$

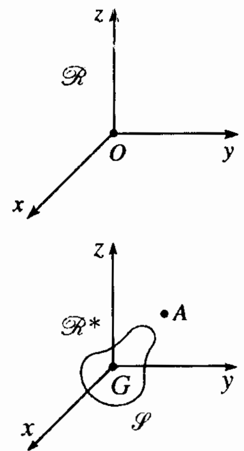
Biết rằng: $\vec{P}^* = \sum_i m_i\vec{v}_i^* = \vec{0}$ chúng ta nhận thấy momen động lượng của hệ trong hệ quy chiếu trọng tâm là độc lập đối với điểm mà tại đó ta tính. Chúng ta có thể viết momen này mà không cần nói rõ điểm đó ở chỉ số:

$$\vec{L}_A^* = \vec{L}_G^* = \vec{L}^*.$$

(Mặc dù vậy, chúng ta sẽ chỉ rõ điểm đó ở các phần tiếp theo của sách này vì thuận tiện để nhớ đến hệ quy chiếu)

Dùng định lý KŒNIG, ta có:

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^* = \vec{L}^*.$$

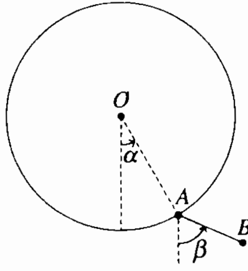


H.13. *Hệ quy chiếu trọng tâm.*

Áp dụng 2

Momen động lượng của một thanh

Hai chất điểm A và B giống hệt nhau, có khối lượng m liên kết với nhau bằng một thanh chiều dài là b, khối lượng không đáng kể. A dịch chuyển trên vòng tròn tâm O bán kính b và thanh AB có thể dao động quanh một trục đi qua A và vuông góc với mặt phẳng ở hình 14.



H.14. *AB dịch chuyển trên vòng tròn.*

Tính tổng động lượng và momen động lượng ở O của hệ AB theo các góc α, β và đạo hàm của chúng.

• Phương pháp thứ nhất

$\vec{P} = m\vec{v}(A) + m\vec{v}(B)$.

$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}(A) + \overrightarrow{OB} \wedge m\vec{v}(B)$.

với

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} b\cos\alpha \\ b\sin\alpha\,; \\ 0 \end{array}\right. \qquad \vec{v}(A)\left|\begin{array}{l} -b\dot{\alpha}\sin\alpha \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha\,; \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OB}\left|\begin{array}{l} b(\cos\alpha + \cos\beta) \\ b(\sin\alpha + \sin\beta) \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{v}(B)\left|\begin{array}{l} -b(\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\beta}\sin\beta) \\ b(\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{\beta}\cos\beta)\,; \\ 0 \end{array}\right.$$

và $$\vec{P}\left|\begin{array}{l} -mb(2\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\beta}\sin\beta) \\ mb(2\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{\beta}\cos\beta)\,; \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{L}_O = mb^2(2\dot{\alpha} + \dot{\beta} + 2\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta))\vec{e}_z.$$

• Phương pháp thứ hai

Chúng ta có thể dùng định lý KŒNIG bằng cách đưa vào quán tâm G của hệ, điểm giữa của AB:

$$\overrightarrow{OG}\left|\begin{array}{l} b\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta\right) \\ b\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta\right); \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{v}(G)\left|\begin{array}{l} -b\left(\dot{\alpha}\sin\alpha + \frac{1}{2}\dot{\beta}\sin\beta\right) \\ b\left(\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{1}{2}\dot{\beta}\cos\beta\right) \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\vec{L}^*_G = \overrightarrow{GA} \wedge m\vec{v}(A)^* + \overrightarrow{GB} \wedge m\vec{v}(B)^*$$
$$= 2\overrightarrow{GB} \wedge m\vec{v}(B)^*,$$

vì $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$ và $\vec{v}(A)^* = -\vec{v}(B)^*$

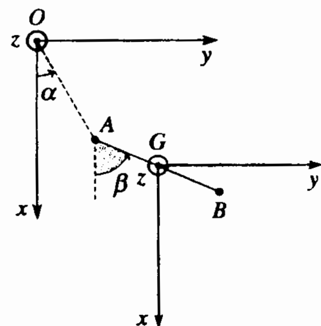
$$\overrightarrow{GB}\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}b\cos\beta \\ \frac{1}{2}b\sin\beta, \\ 0 \end{array}\right. \quad \text{và} \quad \vec{v}(B)^*\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2}b\dot{\beta}\sin\beta \\ \frac{1}{2}b\dot{\beta}\cos\beta \\ 0 \end{array}\right.$$

Rõ ràng là ta tìm được :

$\vec{P} = 2m\vec{v}(G)$

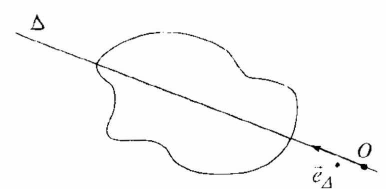
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge 2m\vec{v}(G) + \vec{L}^*_G$$
$$= mb^2(2\dot{\alpha} + \dot{\beta} + 2\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta))\vec{e}_z$$

(chú ý: khối lượng tổng cộng của hệ là $2m$).



H.15. *Hệ quy chiếu trọng tâm (G ; x, y, z) của thanh.* ▶

3.2.4. Momen động lượng đối với một trục



H.16. *Mômen động lượng đối với một trục.*

Hình chiếu trên trục Δ đi qua O của momen động lượng $\vec{L}_O$ của hệ $\mathscr{S}$ là momen động lượng L_Δ của $\mathscr{S}$ đối với trục Δ. Vậy, nếu gọi $\vec{e}_\Delta$ là vectơ đơn vị theo trục Δ, ta có:

$$\vec{L}_\Delta = \vec{L}_O.\vec{e}_\Delta .$$

Có thể nghiệm lại dễ dàng rằng L_Δ không phụ thuộc vào điểm O của trục Δ.

Khái niệm momen động lượng đối với một trục rất cần (*h*.16) khi hệ $\mathscr{S}$ là một vật rắn quay quanh trục Δ; ta sẽ thấy điều này ở *chương* 2.

4 Tổng động lực và momen động lực của một hệ chất

4.1. Tổng động lực

Các điểm M_i tạo nên hệ $\mathscr{S}$ chuyển động với gia tốc $\vec{a}_i$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$.

Tổng động lực $\vec{S}$ (đôi khi còn gọi là gia tốc lượng) của $\mathscr{S}$ trong $\mathscr{R}$ bằng tổng:

$$\vec{S} = \sum m_i \vec{a}_i .$$

Cũng như tổng động lượng, chúng ta có thể biểu diễn tổng động lực theo hàm của gia tốc $\vec{a}(G)$ của quán tâm G và khối lượng tổng cộng m của hệ:

$$\vec{S} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}(G)\right) = m\vec{a}(G) .$$

Tổng động lực của một hệ chất trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ bằng tổng động lực của một chất điểm giả định nằm ở quán tâm G và có khối lượng bằng khối lượng tổng cộng của hệ trong $\mathscr{R}$.

$$\vec{S} = m\vec{a}(G) .$$

Đến đây chúng ta cũng có thể chứng minh hệ thức (quan trọng) giữa tổng động lượng $\vec{P} = m\vec{v}(G)$ và tổng động lực $\vec{S} = m\vec{a}(G)$ của hệ.

$$\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Cuối cùng chú ý là trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$, tổng động lực rõ ràng là triệt tiêu: $\vec{S}^* = \vec{0}$.

4.2. Momen động lực

4.2.1. Định nghĩa

Momen động lực $\vec{D}_O$ tại một điểm O của hệ $\mathscr{S}$ trong $\mathscr{R}$ có biểu thức là:

$$\vec{D}_O = \sum_i \vec{OM}_i \wedge m_i\vec{a}_i .$$

4.2.2. Định lý KŒNIG đối với momen động lực

Cũng như momen động lượng, ta có thể liên hệ giữa momen động lực $\vec{D}_O$ tại O trong $\mathscr{R}$ và momen động lực $\vec{D}_G^* = \sum \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i\vec{a}_i^*$ tại G trong $\mathscr{R}^*$.

$\mathscr{R}^*$ là tịnh tiến đối với $\mathscr{R}$, từ định luật hợp thành các gia tốc ta có:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_e(M_i) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}_i^* = \vec{a}(G) + \vec{a}_i^* .$$

Gia tốc CORIOLIS bằng không, còn gia tốc kéo theo, không phụ thuộc vào chỉ số i và bằng gia tốc $\vec{a}(G)$ của điểm G.

Ta rút ra:

$$\vec{D}_O = \sum_i \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_i\right) \wedge m_i\left(\vec{a}(G) + \vec{a}_i^*\right) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{a}(G) + \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i\vec{a}_i^*,$$

vì: $\sum_i m_i\overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$ và $\sum_i m_i\vec{a}_i^* = \vec{S}^* = \vec{0}$.

Vậy chúng ta suy ra được định lý KŒNIG đối với momen động lực.

Momen động lực tại O của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ là bằng tổng của:

- **momen động lực tại O của chất điểm giả định ở G và có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ trong $\mathscr{R}$;**
- **momen động lực ở G của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu trọng tâm (nghĩa là trong chuyển động của hệ quanh G);**

vậy:
$$\vec{D}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{a}(G) + \vec{D}_G^* .$$

4.2.3. Momen động lực trọng tâm

Cũng như đối với momen động lượng, chúng ta có thể nghiệm lại rằng momen động lực của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$ không phụ thuộc điểm mà ta tính và ta có thể viết momen đó không cần ghi ở chỉ số điểm mà ta tính:

$$\vec{D}_A^* = \vec{D}_G^* = \vec{D}^*$$

Ngoài ra, định lý KŒNIG cho:

$$\vec{D}_G = \vec{D}_G^* = \vec{D}^* .$$

4.2.4. Quan hệ giữa momen động lượng và momen động lực

Ta lấy đạo hàm momen động lượng $\vec{L}_A$ của hệ $\mathscr{S}$ tại điểm A, điểm có thể chuyển động trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$; ta có:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\vec{v}_i\right) = \sum_i \left(\vec{v}_i - \vec{v}(A)\right) \wedge m_i\vec{v}_i + \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\vec{a}_i .$$

Ta biết rằng: $\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{0}$ và $\sum_i m_i\vec{v}_i = m\vec{v}(G)$, ta có:

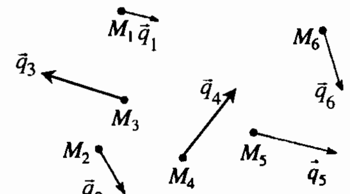
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{D}_A - \vec{v}(A) \wedge m\vec{v}(G) .$$

Thực tế chúng ta sẽ ít dùng hệ thức này trong trường hợp tổng quát (vả lại, các phép tính lúc bấy giờ rất rắc rối: *xem bài tập có giải* 2, *chương* 5). Chúng ta đặc biệt chỉ dùng hệ thức này khi:

- A là một điểm cố định trong $\mathscr{R}$;
- A trùng với G (thoạt đầu chuyển động trong $\mathscr{R}$)

Trong trường hợp này hệ thức trên đơn giản là:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{D}_A \text{, nếu } A \text{ cố định trong } \mathscr{R} \text{ hay là nếu } A = G.$$



H.17. *Hệ các vectơ* $\vec{q}_i$.

<u>*Chú ý:*</u>

Ta có thể nhận thấy rằng ta cũng có $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{D}_A$ *nếu các vectơ* $\vec{v}_{(A)}$ *và* $\vec{v}_{(G)}$ *là đồng tuyến. Trường hợp này chỉ có lợi ích rất hạn chế.*

5 Toocsơ động và toocsơ động lực

Tổng động lượng và momen động lượng cũng như tổng động lực và momen động lực có những tính chất của một khái niệm toán học tên gọi là toocsơ mà ta sẽ định nghĩa tóm tắt trong chương này.

5.1. Khái niệm về toocsơ

Xét một tập hợp các điểm M_i và ở mỗi điểm của tập hợp này ta gắn với một vectơ $\vec{q}_i$ ($\vec{q}_i$ có thể là vecơ vận tốc của điểm M_i, có thể là động lượng của điểm này, có thể là lực tác dụng lên điểm đó...) (*h.*17).

Đối với hệ các vectơ này người ta định nghĩa:

- tổng vectơ: $\vec{R} = \sum_i \vec{q}_i$
- momen tại O: $\vec{\mathscr{M}}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{q}_i$.

Chúng ta có thể nhận thấy rằng các momen tại hai điểm O và A nghiệm đúng hệ thức:

$$\vec{\mathscr{M}}_A = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \vec{\mathscr{M}}_O$$

Tổng $\vec{R}$ và momen tại O, $\vec{\mathscr{M}}_O$, được gọi là các phần tử rút gọn tại O của toocxơ $\mathscr{T}$ gắn với hệ các vectơ $\vec{q}_i$. Cho biết các phần tử rút gọn tại một điểm O là xác định hoàn toàn toocsơ, vì từ đây ta có thể tính ra các phần tử rút gọn ở bất cứ một điểm A nào khác:

$$\vec{R} \text{ là độc lập với } O \text{ và } \vec{\mathscr{M}}_A = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \vec{\mathscr{M}}_O.$$

5.2. Toocsơ động và toocsơ động lực

Ta có thể dễ dàng nghiệm ra rằng trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$, tổng động lượng $\vec{P}$ và momen động lượng $\vec{L}_A$ ở A của hệ chất $\mathscr{S}$ tạo nên các phần tử rút gọn của *toocsơ động* $\mathscr{T}_c(\vec{P}, \vec{L}_A)$.

Đặc biệt ta có thể viết:

$$\vec{L}_B = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P} + \vec{L}_A.$$

Cũng vậy, tổng động lực $\vec{S}$ và momen động lực $\vec{D}_A$ ở A của $\mathscr{S}$ là các phần tử rút gọn của toocsơ động lực $\mathscr{T}_d(\vec{S}, \vec{D}_A)$, với:

$$\vec{D}_B = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S} + \vec{D}_A.$$

6 Động năng của một hệ chất

6.1. Định nghĩa

Động năng của một hệ $\mathcal{S}$ bao gồm các điểm M_i có khối lượng m_i, chuyển động với vận tốc $\vec{v}_i$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là bằng tổng động năng của mỗi điểm:

$$\mathscr{E}_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$

6.2. Định lí KŒNIG đối với động năng

Chúng ta tìm liên hệ giữa động năng $\mathscr{E}_K$ của hệ chất $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$ với động năng $\mathscr{E}_K^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$ của hệ này trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$ của nó.

Dùng cách hợp thành các vectơ vận tốc $\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}(G)$ ta có:

$$\mathscr{E}_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i^* + \vec{v}(G)\right)^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}(G)^2 + \mathscr{E}_K^* + \vec{v}(G) \sum_i m_i \vec{v}_i^* .$$

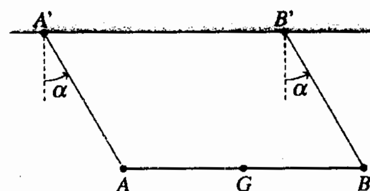
Số hạng cuối cùng rõ ràng là bằng không vì tổng động lượng $\vec{P}^* = \sum_i m_i \vec{v}_i^*$ bằng không trong $\mathcal{R}^*$, và ta suy ra được định lý KŒNIG ứng với động năng:

Động năng của hệ $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ là bằng tổng:

- **động năng chất điểm giả định ở G có khối lượng bằng khối lượng tổng cộng của hệ trong $\mathcal{R}$;**
- **động năng của hệ $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu trọng tâm của nó (nghĩa là trong chuyển động quanh điểm G);**

vậy:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2} m\, v(G)^2 + \mathscr{E}_K^*$$



H.18. *Chuyển động của một thanh treo trên hai dây.*

Áp dụng 3

Thanh treo trên hai dây

Một thanh AB thuần chất, có tâm G, khối lượng m được treo trên hai dây giống nhau AA' và BB' có chiều dài b (h.18). Thanh dao động trong mặt thẳng đứng, hai dây AA' và BB' luôn luôn song song nhau.

Tính động năng của thanh theo đạo hàm $\dot{\alpha}$ của độ nghiêng α của các dây ở một thời điểm cho trước.

Định lý KŒNIG dẫn đến:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2} m v(G)^2 + \mathscr{E}_K^* .$$

Vì trong $\mathcal{R}^*(G;\ x,\ y,\ z)$, thanh đứng yên và $\mathscr{E}_K^* = 0$; từ đó:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2} m v(G)^2 = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\alpha}^2 .$$

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ HỢP THÀNH CỦA VẬN TỐC

Vận tốc của điểm M ở hai hệ quy chiếu $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ liên hệ với nhau bởi:

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}_e(M) + \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2},$$

ở đây $\vec{v}_e(M)$ là tốc độ kéo theo của điểm M, nghĩa là tốc độ của điểm $M_{\mathcal{R}_2}$ (điểm trùng hợp) cố định trong $\mathcal{R}_2$ nó trùng với điểm M ở thời gian t:

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(M_{\mathcal{R}_2})_{/\mathcal{R}_1} = \vec{v}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}.$$

■ HỢP THÀNH CÁC GIA TỐC

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M) + \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2},$$

ở đây $\vec{a}_e(M)$ là gia tốc kéo theo của điểm M, nghĩa là gia tốc của điểm $M_{\mathcal{R}_2}$ (điểm trùng hợp) cố định trong $\mathcal{R}_2$ nó trùng với điểm M ở thời gian t :

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M_{\mathcal{R}_2})_{/\mathcal{R}_1} = \vec{a}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

và $\vec{a}_C(M)$ là gia tốc CORIOLIS của điểm M :

$$\vec{a}_C(M) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_2}.$$

■ CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

• Nếu $\mathcal{R}_2$ tịnh tiến đối với $\mathcal{R}_1$:

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2)_{/\mathcal{R}_1} \text{ độc lập với } M \text{ và } \vec{a}_C(M) = \vec{0}.$$

• Nếu $\mathcal{R}_2$ là quay đều quanh trục cố định của $\mathcal{R}_1$:

$$\vec{a}_e(M) = -\Omega^2_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \overrightarrow{HM}, \text{ ở đây } H \text{ là hình chiếu của } M \text{ trên trục quay.}$$

■ QUÁN TÂM

Quán tâm G (hay là khối tâm, trọng tâm) của một hệ chất $\mathcal{S}$ được định nghĩa là:

$$m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \text{hay} \quad \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

■ HỆ QUY CHIẾU TRỌNG TÂM

So với hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ trong đó ta nghiên cứu chuyển động của $\mathcal{S}$, hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$, gắn với G, có chuyển động tịnh tiến. Tất cả các vectơ gắn với $\mathcal{R}^*$ là không đổi trong $\mathcal{R}$.

■ TOOCSƠ ĐỘNG VÀ ĐỘNG LỰC

Một toocsơ $\mathcal{T}$ được xác định tại một điểm O bởi hai phần tử rút gọn: tổng $\vec{R}$ và momen $\vec{\mathcal{M}}_O$

Momen của toocsơ ở một điểm A khác được suy ra theo quan hệ đặc trưng:

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \vec{\mathcal{M}}_O.$$

Toocsơ động $\mathscr{T}_c$ của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ được xác định bởi:

- tổng động lượng : $\vec{P} = m\vec{v}(G)$;
- momen động lượng ở O: $\vec{L}_O = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$.

Toocsơ động lực $\mathscr{T}_d$ của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$, được xác định bởi:

- tổng động lực: $\vec{S} = m\vec{a}(G)$;
- momen động lực ở O: $\vec{D}_O = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{a}_i$.

■ CÁC HỆ THỨC

- Giữa tổng động lượng và tổng động lực: $\vec{S} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$.
- Giữa momen động lượng và momen động lực:
- nếu điểm O là cố định trong $\mathscr{R}$: $\vec{D}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$;
- ở quán tâm G: $\vec{D}_G = \dfrac{d\vec{L}_G}{dt}$;
- nếu điểm A là di động trong $\mathscr{R}$: $\vec{D}_A = \dfrac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}(A) \wedge m\vec{v}(G)$.

■ ĐỘNG NĂNG

- Động năng của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ được xác định bởi:

$$\mathscr{E}_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$

■ CÁC ĐỊNH LÝ KŒNIG

Các định lý KŒNIG cho phép phân tích momen động lượng, hoặc momen động lực, hoặc động năng của $\mathscr{S}$ trong $\mathscr{R}$ thành tổng của:

- momen động lượng, hoặc momen động lực hoặc động năng của chất điểm giả định ở G có khối lượng bằng tổng cộng khối lượng của hệ, trong $\mathscr{R}$;
- momen động lượng hoặc momen động lực hoặc động năng của hệ $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$;

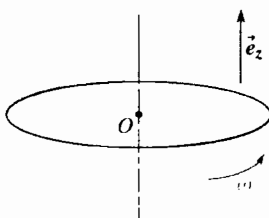
- Đối với momen động lượng: $\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}_G^*$.
- Đối với momen động lực: $\vec{D}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{a}(G) + \vec{D}_G^*$.
- Đối với động năng: $\mathscr{E}_K = \dfrac{1}{2} m v(G)^2 + \mathscr{E}_K^*$.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP GIÁO TRÌNH

1 Vòng quay

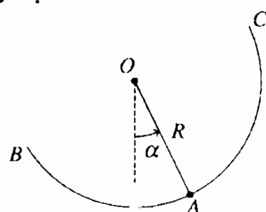
Một vòng tròn thuần chất có tâm O khối lượng m bán kính a quay với tốc độ ω không đổi quanh trục cố định của nó.



Tính momen động lượng của vòng tròn ở O, momen động lực ở O và động năng của vòng tròn đó.

2 Các phần tử động học của con lắc

Xét một con lắc treo ở điểm O cố định gồm thanh OA khối lượng không đáng kể và chiều dài là R, người ta hàn vào thanh một dây thuần nhất khối lượng m có dạng là một nửa vòng tròn mà thanh OA là bán kính. Vị trí của con lắc được xác định theo góc α giữa thanh OA và đường thẳng đứng hướng xuống.

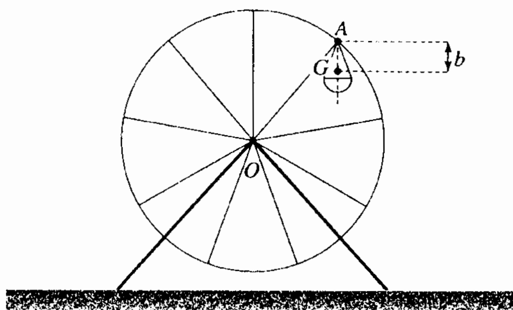


Xác định tổng động lượng, momen động lượng ở O, momen động lực ở O và động năng của con lắc phụ thuộc vào α và các đạo hàm của chúng.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

3 Các phần tử động học của thùng treo ở "bánh xe to"

Một bánh xe to ở chỗ chơi ngày lễ hội có bán kính R quay với tốc độ góc không đổi ω quay quanh trục nằm ngang của bánh xe.

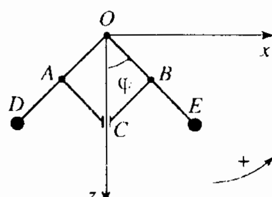


Ta xét một cái thùng treo (móc nối rất tốt ở A trên bánh xe) và hành khách (mà ta xem như hoàn toàn không động đậy trong thùng treo): tập hợp này (thùng treo + hành khách) có khối lượng m, có quán tâm G nằm trên đường thẳng đứng qua điểm A, cách A một khoảng b.

Xác định momen động lượng ở O, momen động lực ở O và động năng của tập hợp (thùng treo + hành khách).

4 ★ Các phần tử động học của một hệ nối khớp

Bốn thanh OD, OE, AC và BC có khối lượng không đáng kể nối khớp với nhau tại các điểm O, A, B và C. Điểm O là cố định. Măng sông C được xem như là một chất điểm khối lượng m trượt theo trục thẳng đứng (Oz).



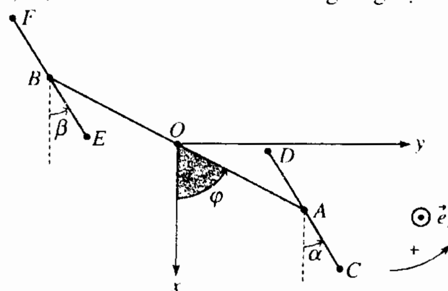
Ở các mút D và E có hai khối điểm m giống nhau. Ta xác định vị trí của hệ bằng góc biến đổi φ. Xác định tổng động lượng, momen động lượng tại O và động năng của hệ phụ thuộc vào đạo hàm $\dot{\varphi}$ của góc φ.

Cho biết: $OA = OB = AC = BC = AD = BE = b$.

5 ★Các phần tử động học của bốn khối điểm

Một thanh AB có khối lượng không đáng kể, chiều dài $4a$ được treo ở điểm giữa O cố định.

Ở A và B có khớp nối với hai thanh giống nhau CD và EF, khối lượng không đáng kể, chiều dài $2a$ (A là điểm giữa của CD, B điểm giữa của EF). Ở các đầu mút C, D, E và F có bốn khối điểm giống hệt nhau m.

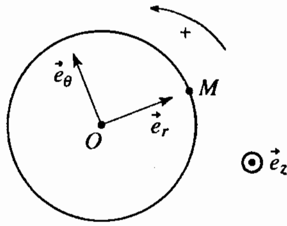


Tính momen động lượng ở O và động năng của hệ phụ thuộc vào các góc φ, α, β và đạo hàm của chúng.

LỜI GIẢI

1 *Điểm M của vòng tròn được xác định bởi các tọa độ cực $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r$, ta có:*

$$\vec{v}(M) = a\omega\vec{e}_\theta .$$



Từ đây ta suy ra:

- *Momen động lượng ở O:*

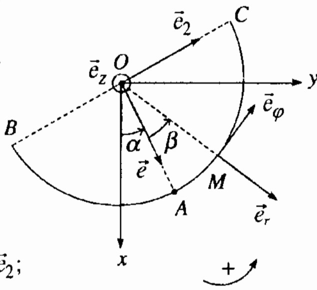
$$\vec{L}_O = \int_{vòng} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)\mathrm{d}m = ma^2\omega\vec{e}_z;$$

- *Momen động lực ở O:* $\vec{D}_O = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$;

- *Động năng:* $\mathscr{E}_K = \int_{vòng} \dfrac{1}{2}v^2(M)\mathrm{d}m = \dfrac{1}{2}ma^2\omega^2$

2 *Một điểm M của nửa vòng tròn được xác định bởi góc: $\varphi = \alpha + \beta$ với β = không đổi (xem sơ đồ bên cạnh), từ đấy:*

$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ và $\vec{v}(M) = R\dot{\alpha}\vec{e}_\varphi$



Từ đây ta suy ra:

$$\vec{P} = \int_B^C \vec{v}(M)\mathrm{d}m = \frac{2}{\pi}mR\dot{\alpha}\vec{e}_2;$$

$$\vec{L}_O = \int_B^C \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)\mathrm{d}m = mR\dot{\alpha}\vec{e}_z;$$

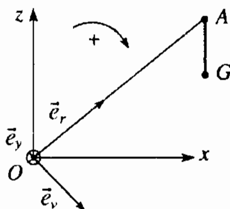
$$\vec{D}_O = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = mR^2\ddot{\alpha}\vec{e}_z; \quad \mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2.$$

3 *Hệ (thùng treo+hành khách) là cố định trong hệ quy chiếu trọng tâm (thùng treo luôn luôn thẳng đứng và không quay quanh G)*

Các định lý KŒNIG cho ta:

$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G)$; $\vec{D}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{a}(G)$;

$\mathscr{E}_K = \dfrac{1}{2}mv(G)^2.$



Ta hãy xác định $\vec{v}(G)$ và $\vec{a}(G)$

Biết rằng $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AG}$ là một vectơ không đổi, theo sơ đồ ta có thể suy ra:

$$\vec{v}(G) = \vec{v}(A) = R\omega\vec{e}_\theta \text{ và } \vec{a}(G) = \vec{a}(A) = -R\omega^2\vec{e}_r,$$

từ đó: $\vec{L}_O = mR^2\omega\vec{e}_y, \vec{D}_O = \vec{0}$ và $\mathscr{E}_K = \dfrac{1}{2}mR^2\omega^2$.

Chú ý:

Ta cũng có thể tính $\vec{D}_O$ theo $\vec{D}_O = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$ (O là cố định) và tìm được

$\vec{D}_O = \vec{0}$

4 • **Tổng động lượng**

$$\vec{P} = m\vec{v}(D) + m\vec{v}(E) + m\vec{v}(C) = 3m\vec{v}(G)$$

vậy $\vec{P} = -6mb\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{e}_z$.

• **Momen động lượng:**

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OD} \wedge m\vec{v}(D) + \overrightarrow{OE} \wedge m\vec{v}(E) + \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{v}(C)$$

Số hạng cuối rõ ràng là bằng không, những số hạng đầu là bằng nhau và bằng $4mb^2\dot{\varphi}\vec{e}_y$ từ đó: $\vec{L}_O = 8mb^2\dot{\varphi}\vec{e}_y$.

• **Động năng**

$\mathscr{E} = \dfrac{1}{2}mv(D)^2 + \dfrac{1}{2}mv(E)^2 + \dfrac{1}{2}mv(C)^2$, *với :*

$$v(D)^2 = v(E)^2 = (2b\dot{\varphi})^2 \text{ và } v(C)^2 = (2b\sin\varphi\dot{\varphi})^2$$

vậy : $\mathscr{E}_K = 2mb^2\dot{\varphi}^2(2 + \sin^2\varphi)$.

5 • **Phương pháp 1: tính trực tiếp**

$$\overrightarrow{OC}\left|\begin{array}{l} a(2\cos\varphi + \cos\alpha) \\ a(2\sin\varphi + \sin\alpha) \\ 0 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OD}\left|\begin{array}{l} a(2\cos\varphi - \cos\alpha) \\ a(2\sin\varphi - \sin\alpha) \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{OE}\left|\begin{array}{l} a(-2\cos\varphi + \cos\beta) \\ a(-2\sin\varphi + \sin\beta) \\ 0 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{OC}\left|\begin{array}{l} a(-2\cos\varphi - \cos\beta) \\ a(-2\sin\varphi - \sin\beta) \\ 0 \end{array}\right.$$

Sau khi tính các thành phần của tốc độ của bốn khối lượng, ta có thể suy ra:

• **Momen động lượng ở *O* :**

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{v}(C) + \overrightarrow{OD} \wedge m\vec{v}(D) + \overrightarrow{OE} \wedge m\vec{v}(E) + \overrightarrow{OF} \wedge m\vec{v}(F)$$
$$= 2ma^2(8\dot{\varphi} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{e}_z;$$

• *Động năng:*

$$\mathscr{E}_K = ma^2(8\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2).$$

• **Phương pháp 2: dùng các định lý KŒNIG:**

• *Momen động lượng ở O:*

$$\vec{L}_O = \underbrace{(\overrightarrow{OA} \wedge 2m\vec{v}(A) + 2ma^2\dot{\alpha}\vec{e}_z)}_{\text{Thanh } CD} + \underbrace{(\overrightarrow{OB} \wedge 2m\vec{v}(B) + 2ma^2\dot{\beta}\vec{e}_z)}_{\text{Thanh } EF}$$

vậy $\vec{L}_O = 2ma^2(8\dot{\varphi} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{e}_z$.

• *Động năng:*

$$\mathscr{E}_K = \left(\frac{1}{2}(2m)v^2(A) + \frac{1}{2}(2m)a^2\dot{\alpha}^2\right) + \left(\frac{1}{2}(2m)v^2(B) + \frac{1}{2}(2m)\alpha^2\dot{\beta}^2\right)$$

vậy $\mathscr{E}_K = ma^2(8\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$.

CHUYỂN ĐỘNG CỦA MỘT VẬT RẮN

2

MỤC LỤC

Mở đầu

Vật rắn rất quan trọng đối với cơ học vì nhiều "hệ chất" thường là kết hợp của nhiều vật rắn. Sau khi đã thấy ở chương I các tính chất có giá trị đối với mọi hệ chất, chúng ta nghiên cứu ở đây một số tính chất đặc biệt ở các hệ vật rắn.

Nhưng xét cho cùng thì ở cơ học cái gì gọi là vật rắn ?

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

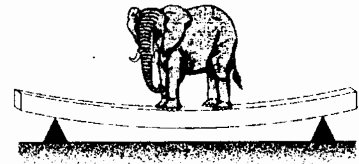
■ Hợp thành các vận tốc và gia tốc khi thay đổi hệ quy chiếu.

■ Khái niệm về toocsơ.

■ Các định lý KŒNIG.

1 Vật rắn ở cơ học

1.1. Định nghĩa vật rắn


H.1. *Con voi trên cái xà.*

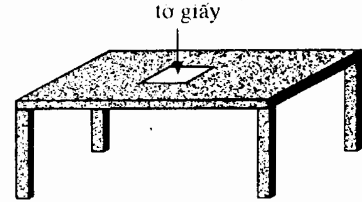
Mỗi một chúng ta có một ý chính xác nhiều hoặc ít về khái niệm vật rắn : ví như trực giác làm cho ta nghĩ rằng cái xà bằng kim loại là một vật rắn còn tờ giấy là không phải.

Ở cơ học, ta gọi vật rắn là vật không biến dạng : khoảng cách giữa hai điểm nào đó của một vật rắn luôn giữ không đổi theo thời gian.

Khái niệm vật không biến dạng là một chuẩn mực.

• Như vậy, đối với chúng ta xà kim loại có vẻ như là không biến dạng, nhưng khi bị tác dụng một lực lớn, xà có thể bị biến dạng (*h*.1) : theo ý như vừa trình bày ở trên, xà không phải là vật rắn.

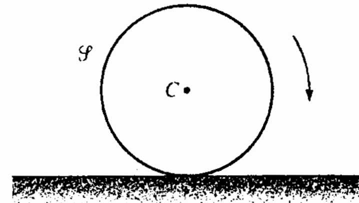
• Một tờ giấy có thể trượt trên mặt bàn (*h*.2) mà không biến dạng : trong điều kiện này ta có thể xem tờ giấy là một vật rắn khi chuyển động.



H.2. *Tờ giấy trên bàn.*

Do đó, cùng một hệ chất trong những điều kiện này có thể xem như vật rắn, trong một số điều kiện khác lại phải xem là vật biến dạng.

1.2. Hệ quy chiếu gắn liền với vật rắn



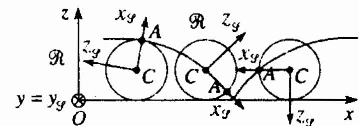
H.3. *Vòng tròn trên mặt đất.*

Khi chúng ta nghĩ đến một vật rắn, trước hết chúng ta hình dung một chất liệu rắn. Thí dụ xét một vòng tròn $\mathcal{S}$ lăn trên đất (*h*3) : chất liệu nằm trên vòng tròn bán kính *b* và tâm là *C*.

Khi mà không có chất liệu ở *C* thì tâm *C* có phải là một bộ phận của vòng tròn rắn hay không ? Câu trả lời là phải, vì rõ ràng là khi vòng tròn tiến lên, điểm *C* tiến lên cùng với vòng tròn !

Thực tế ta có thể gắn với vòng tròn $\mathcal{S}$ (và nói chung với tất cả chất rắn) một không gian điểm (không có chất) liên kết chặt chẽ với vòng tròn, dịch chuyển cùng với vòng tròn, hay tổng quát hơn, một hệ quy chiếu $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ gắn với vòng tròn : hệ quy chiếu này tạo nên một vật rắn (không có vật chất) và ta có thể gắn cho hệ quy chiếu này một hệ tọa độ (C : $\vec{e}_{x\mathcal{S}}$, $\vec{e}_{y\mathcal{S}}$, $\vec{e}_{z\mathcal{S}}$).

Đặc trưng chuyển động của vật rắn $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ tương đương với đặc trưng chuyển động của hệ quy chiếu $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ đối với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ (*h*.4).



H.4. *Vòng tròn và hệ quy chiếu $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ chuyển động trong $\mathcal{R}$.*

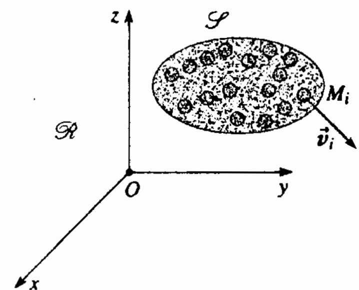
1.3. Lợi ích của khái niệm vật rắn

Để nghiên cứu chuyển động của một hệ chất nào đấy, ta phải đặc trưng chuyển động của từng điểm của hệ, điều này khiến ta phải đụng chạm đến một số rất nhiều thông số (mỗi điểm ba thông số) và dẫn đến những phép tính rắc rối khó gỡ (*h*.5).

Nếu hệ $\mathcal{S}$ được xem như vật rắn, số thông số phải tính đến trở nên hoàn toàn vừa phải : nhiều nhất 6 thông số là đủ để xác định chuyển động của vật rắn $\mathcal{S}$ hoặc của hệ quy chiếu $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ gắn với $\mathcal{S}$:

• ba thông số để xác định điểm gốc $O_{\mathcal{S}}$ của $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ trong $\mathcal{R}$.

• ba thông số (góc) để xác định định hướng của một trong những vectơ đơn vị của $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ trong $\mathcal{R}$.



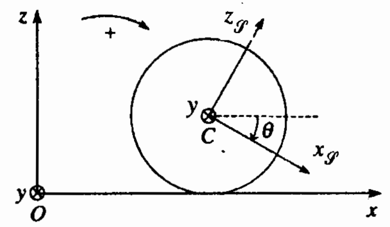
H.5. *Chuyển động của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$.*

Rất thường xảy ra là chuyển động vật rắn có những ràng buộc hay những liên kết và số thông số xác định chuyển động của vật rắn là nhỏ hơn sáu.

Ví như chúng ta trở lại thí dụ về vòng tròn (*h*.6) và nếu giả thiết rằng vòng tròn dịch chuyển trong mặt thẳng đứng và luôn luôn tiếp xúc với mặt đất nằm ngang, hai thông số là đủ để xác định chuyển động của nó trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

• tọa độ x của tâm C của nó (các tọa độ khác đều không đổi) ;

• một thông số góc θ đặc trưng cho sự quay của vòng tròn (hay sự quay của hệ quy chiếu $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ $(C; \vec{e}_{x\mathcal{S}}, \vec{e}_{y\mathcal{S}}, \vec{e}_{z\mathcal{S}})$ gắn với vòng tròn.



H.6. *Thông số hóa chuyển động của vòng tròn.*

2 Trường vận tốc

2.1. Hệ thức đặc trưng

Vật rắn $\mathcal{S}$ dịch chuyển trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$. Xét hệ tọa độ $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ gắn với $\mathcal{S}$, có gốc là P (điểm gắn chặt với $\mathcal{S}$) (*hình* 7).

Ta hãy viết biểu thức của vận tốc $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ trong $\mathcal{R}$ của một điểm M nào đấy, gắn chặt với $\mathcal{S}$, tức là cố định trong $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$. Muốn vậy ta dùng định luật hợp thành của vận tốc :

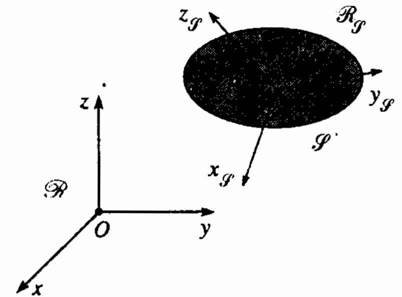
$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_e(M) + \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_{\mathcal{S}}} = \vec{v}_e(M) = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{PM} .$$

Vectơ quay kéo theo $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}}/\mathcal{R}}$ của $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ đối với $\mathcal{R}$ cũng là *vectơ quay* (tức thời) của vật rắn $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$ và từ đây, ta viết gọn hơn : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{\mathcal{S}}/\mathcal{R}}$.

Cũng vậy, ta kí hiệu $\vec{v}(M) = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ là vận tốc của một điểm M của vật rắn trong $\mathcal{R}$.

Như vậy, ta có được một hệ thức quan trọng giữa các vận tốc của hai điểm tùy ý P và M của vật rắn tại một thời điểm cho trước :

$$\boldsymbol{\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}}$$



H.7. *Chuyển động của vật rắn $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$.*

Ta cũng nhận thấy rằng vận tốc của các điểm của một vật rắn nghiệm đúng định luật đặc trưng của các momen một toocsơ, điều này cho phép chúng ta định nghĩa toocsơ vận tốc, hay là toocsơ động học của một vật rắn, là toocsơ mà :

• tổng hợp vectơ là vectơ quay $\vec{\Omega}$ của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$.

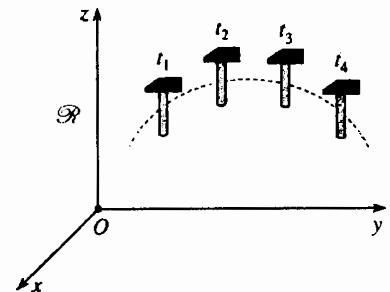
• momen ở P là vận tốc $\vec{v}(P)$ của điểm P của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$.

Như vậy nếu chúng ta biết vận tốc $\vec{v}(P)$ của một điểm P của vật rắn và vectơ quay $\vec{\Omega}$, ta có thể suy ra vận tốc $\vec{v}(M)$ của tất cả các điểm của vật rắn. Ta không quên rằng vectơ quay $\vec{\Omega}$ là một hàm vectơ của thời gian.

2.2. Các thí dụ về chuyển động đơn giản

2.2.1. Vật rắn tịnh tiến

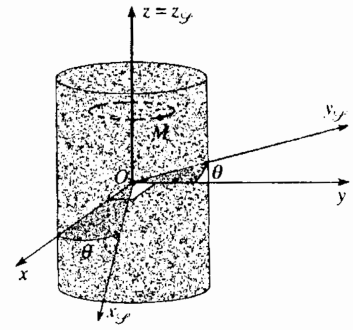
Vật rắn có chuyển động tịnh tiến trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ nếu $\vec{\Omega} = \vec{0}$ (*h*.8). Lúc đó tất cả các điểm của vật rắn có cùng vận tốc tại cùng một thời điểm t cho trước : $\vec{v}(P) = \vec{v}(M) = \vec{v}(t)$ và do đó, các điểm có cùng gia tốc : $\vec{a}(P) = \vec{a}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}(t)$.



H.8. *Cái búa chuyển động tịnh tiến.*

2.2.2. Vật rắn quay quanh trục cố định trong $\mathscr{R}$

Giả sử (Oz) là trục cố định của $\mathscr{R}$. Trong những điều kiện trên, gọi θ là góc mà vật rắn quay (hay là hệ tọa độ gắn với vật rắn quay) ta có (*h*.9) $\vec{\Omega} = \dot{\theta}(t)\vec{e}_z$.



H.9. *Vật rắn quay quanh trục (Oz).*

Mỗi điểm M của vật rắn vẽ nên một vòng tròn trục là (Oz). Dùng các tọa độ của điểm M trong $\mathscr{R}$: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ (r và z không đổi và không phụ thuộc thời gian) ta có :

$$\vec{v}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{và}$$

$$\vec{a}(M) = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/\mathscr{R}} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Cũng nên chú ý rằng những điểm của vật rắn nằm trên trục quay có vận tốc bằng không : chúng không chuyển động trong $\mathscr{R}$.

2.3. Vật rắn quay quanh trục có hướng cố định trong $\mathscr{R}$

2.3.1. Thí dụ thứ nhất : chuyển động của biên (thanh truyền)

Hệ thống biên - maniven (*h*.10) cho phép biến đổi chuyển động quay quanh trục cố định (chuyển động quay của bánh xe) thành chuyển động tịnh tiến (chuyển động của pitông). Ta xem chuyển động của biên AB là chuyển động của một thanh có quán tâm G. Để nghiên cứu chuyển động biên ta có thể đưa vào hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*(G; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Trong hệ quy chiếu này, biên quay quanh trục (Gz) cố định và đối với một điểm M tùy ý của biên, ta có :

$$\vec{v}(M)^* = \vec{v}(G)^* + \vec{\Omega}^* \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{\Omega}^* \wedge \overrightarrow{GM}$$

ở đây $\vec{\Omega}^* = \dot{\theta}\vec{e}_z$ là vectơ quay của biên trong $\mathscr{R}^*$.

Dùng cách hợp thành các vận tốc, trong $\mathscr{R}$ ta có :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}_e(M) + \vec{v}(M)^* = \vec{v}(G) + \vec{\Omega}^* \wedge \overrightarrow{GM}.$$

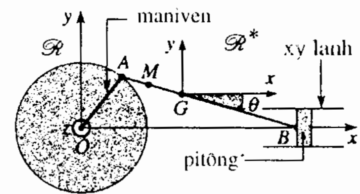
Vậy trong $\mathscr{R}$ ta có thể viết trực tiếp hệ thức giữa vận tốc các điểm M và G của biên :

$$\vec{v}(M) + \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}.$$

và ta nghiệm được rằng : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^* = \dot{\theta}\vec{e}_z$.

Hệ thức cuối này không có gì là lạ, vì vị trí của một điểm M của biên được xác định bởi cùng một góc θ trong hai hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ hay $\mathscr{R}^*$, tịnh tiến đối với nhau :

$$\theta = (\overrightarrow{Gx}, \overrightarrow{GM}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{GM})$$



H.10. *Trong $\mathscr{R}$, maniven OA quay cùng bánh xe quanh trục (Oz) và pitông trượt trong xylanh. Trong $\mathscr{R}^*$, biên quay quanh trục cố định (Gz) đi qua G.*

Ta dễ dàng tổng quát hóa kết quả vừa tìm trên. Vectơ quay của vật rắn $\mathscr{S}$ là giống nhau trong hệ quy chiếu nghiên cứu cũng như trong hệ quy chiếu trọng tâm tương ứng, nói chung là trong mọi hệ quy chiếu tịnh tiến đối với $\mathscr{R}$.

Nghiên cứu chuyển động của biên trong $\mathscr{R}$ có thể phân tách thành :

- **nghiên cứu chuyển động của G trong $\mathscr{R}$ điều này thể hiện *tịnh tiến toàn bộ* của biên.**
- **nghiên cứu chuyển động của biên trong $\mathscr{R}^*$ điều này tương ứng với chuyển động *quay* quanh trục cố định đi qua G.**

Chú ý :

Trong trường hợp một chuyển động bất kì của vật rắn, sự phân tích trên luôn luôn vẫn còn có giá trị, nhưng chuyển động của vật rắn trong $\mathcal{R}^*$ là chuyển động quay quanh trục đi qua G mà phương của nó biến thiên theo thời gian.

Áp dụng 1

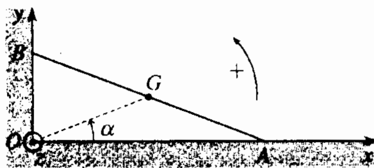
Chuyển động của một thanh.

Một thanh AB đồng nhất chiều dài 2b và quán tâm là G, điểm giữa của AB. Thanh tựa trên mặt đất nằm ngang và gối trên bức tường thẳng đứng (h.11). Vị trí của thanh được xác định theo góc $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OG})$, góc này thay đổi khi thanh trượt ở A và B.

1) *Xác định trực tiếp các thành phần của vận tốc $\vec{v}(G)$ của điểm G phụ thuộc theo α và đạo hàm của α.*

2) *Tìm vectơ quay $\vec{\Omega}$ của thanh.*

Chú ý : Nên rất chú ý vào dấu của các biểu thức khi tính toán.



H.11. *Chuyển động của một thanh.*

1) Trong tam giác vuông OAB, trung tuyến OG có chiều dài b, từ đó :

$$\vec{OG}\begin{vmatrix} b\cos\alpha \\ b\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \quad \vec{v}(G)\begin{vmatrix} -b\dot{\alpha}\sin\alpha \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

2) Vectơ quay của thanh là theo hướng $\vec{e}_z$; ta đặt $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$.

Ta cũng có thể viết biểu thức của $\vec{v}(G)$ như sau :

$$\vec{v}(G) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AG} .$$

Biết rằng $\vec{OA} = 2b\cos\alpha\,\vec{e}_x$, ta có :

$$\vec{v}(A) = -2b\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{e}_x .$$

Từ đây ta suy ra :

$$\vec{v}(G)\begin{vmatrix} -b(\Omega + 2\dot{\alpha})\sin\alpha \\ -b\Omega\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

và cho hai biểu thức của $\vec{v}(G)$ bằng nhau ta có : $\vec{\Omega} = -\dot{\alpha}\,\vec{e}_z$.

2.3.2. Thí dụ thứ hai : chuyển động của bánh xe

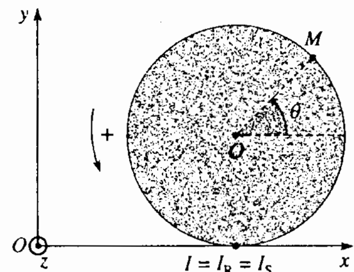
Xét một bánh xe xem như là một đĩa có bán kính b và có tâm C dịch chuyển trên mặt đất nằm ngang cố định trong $\mathcal{R}$, tất cả luôn luôn nằm trong mặt thẳng đứng ($h.$12).

Gọi I là điểm tiếp xúc của bánh xe với mặt đất ở thời điểm t ($h.$12a).

Thực tế ta có thể phân biệt ba điểm ở chỗ tiếp xúc :

- điểm I_S của đất là điểm cố định trong $\mathcal{R}$;
- điểm I_R của bánh xe, khi bánh xe quay thì ở thời điểm sau đấy, điểm này không tiếp xúc với đất nữa.
- điểm hình học I xác định chỗ tiếp xúc.

Ba điểm này tự thân tồn tại và ta vẽ ở *hình* 12b vị trí của những điểm này vào thời điểm $t' > t$: ở thời điểm t' đấy là hai điểm khác J_R của bánh xe, J_S của đất và chúng tiếp xúc với điểm hình học I là điểm tiếp xúc.



H.12a. Ở thời điểm t
$I(t) = I_S(t) = I_R(t)$.

Ở thời điểm t, ba điểm I_S, I_R và I có những vận tốc khác nhau trong $\mathcal{R}$.

- vận tốc điểm I_S của đất rõ ràng là bằng không.
- vận tốc điểm hình học I bằng vận tốc của tâm C vì C và I luôn luôn trên cùng đường thẳng đứng ;
- vận tốc của điểm I_R của bánh xe thỏa mãn :

$$\vec{v}(I_R) = \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI}$$

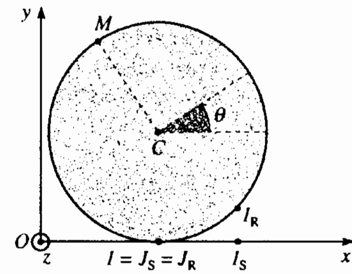
$\vec{\Omega}$ là vectơ quay của bánh xe trong $\mathcal{R}$.

Vận tốc $\vec{v}(I_R)$ có tên là *vận tốc trượt* của bánh xe trên mặt đất (ở đây đừng quên đất là cố định) : $\vec{v}(I_R) = \vec{v}_g$.

Vận tốc trượt $\vec{v}_g$, vuông góc với $\overrightarrow{IC}$ là tiếp tuyến với mặt đất.

Bánh xe lăn không trượt trên mặt đất khi $\vec{v}_g = \vec{v}(I_R) = \vec{0}$.

Điểm I_R của bánh xe tiếp xúc với mặt đất khi đó có vận tốc bằng không ở thời điểm tiếp xúc.



H.12b. *Ở thời điểm $t' > t$:*

$I(t') = J_S(t') = J_R(t')$

$I_S(t') \neq I_R(t')$.

Trong những điều kiện này mọi việc xảy ra như là giữa hai thời điểm gần nhau t và $t + dt$ bánh xe quay quanh một trục đi qua I và đồng tuyến với $\vec{\Omega}$ trục này được gọi là *trục quay tức thời* của bánh xe (*h.*13).

Trong khi bánh xe chuyển động, trục này dịch chuyển với điểm hình học tiếp xúc I và luôn luôn song song với $\vec{\Omega}$ (nghĩa là song song với (Oz)).

Trong những điều kiện làm việc bình thường (khi không nhảy cóc) các bánh xe của ôtô rõ ràng nghiệm đúng tính chất này. Như ở §**2.3.1.** dầu cho bánh xe có trượt hay là không, chuyển động của bánh xe có thể phân tích ra thành chuyển động tịnh tiến của quán tâm C ($\overrightarrow{OC} = x\vec{e}_x + b\vec{e}_y$) và chuyển động quay quanh trục $(C; \vec{e}_z)$ với vận tốc $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$ (θ kí hiệu góc giữa trục (Cx) và một bán kính OM gắn liền với đĩa (*h.*12a).

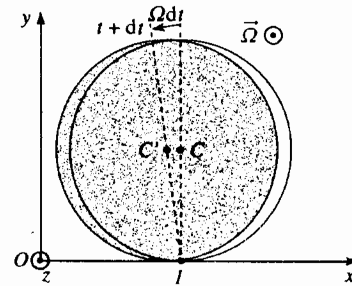
Tốc độ trượt của bánh xe trên đất lúc đó bằng :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_R) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{\theta}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CI} = (\dot{x} + b\dot{\theta})\vec{e}_x,$$

và khi bánh xe không trượt trên mặt đất, $\dot{\theta}$ và $\dot{x}$ liên hệ với nhau bởi $\dot{x} + b\dot{\theta} = 0$.

Khi tích phân hệ thức cuối này, chúng ta nhận xét rằng các chiều dài $I_S J_S = |\Delta x|$ trên mặt đất và $I_R J_R = b|\Delta\theta|$ trên chu vi bánh xe là bằng nhau khi bánh xe không trượt (*h.*12b).

Ta sẽ trở lại tất cả các khái niệm này ở *chương* 5.



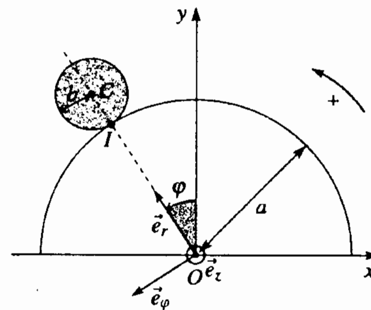
H.13. *Trục quay tức thời của bánh xe.*

Áp dụng 2

Chuyển động của bánh xe trên một giá hình trụ

Bánh xe tâm C bán kính b lăn không trượt trên một giá hình trụ tâm O bán kính a, cố định trong $\mathcal{R}$, luôn ở trong mặt thẳng đứng (h.14).

Xác định vectơ quay $\vec{\Omega}$ của bánh xe phụ thuộc vào góc $\varphi = (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OC})$.



H.14. *Bánh xe trên giá hình trụ.* ▶

Dùng cơ sở để chiếu là $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ quay cùng với điểm C : $\overrightarrow{OC} = (a+b)\vec{e}_r$, từ đó lấy đạo hàm :

$$\vec{v}(C) = (a+b)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi .$$

nhưng ta cũng có thể biểu diễn $\vec{v}\,(C)$ bởi :

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(I_R) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IC} ,$$

với $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z$ và $\vec{v}(I_R) = \vec{0}$ vì đây chỉ có lăn không trượt, từ đó :

$$\vec{v}(C) = +b\dot{\theta}\vec{e}_\varphi \text{ (chú ý các dấu !)}$$

Cân bằng hai biểu thức của $\vec{v}(C)$ ta suy ra :

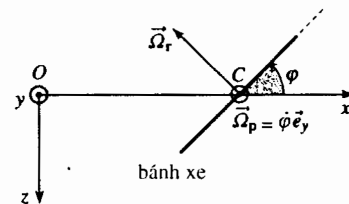
$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_z = \frac{b}{a+b}\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

2.4. Chuyển động của vật rắn trong trường hợp tổng quát

Giả thiết rằng ta không nghiên cứu chuyển động của vật rắn một cách tổng quát nhất mà chỉ đưa ra một vài chỉ dẫn rất tóm tắt khi lấy lại thí dụ về bánh xe trên mặt đất nằm ngang và đặc biệt hơn, thí dụ về bánh trước xe đạp.

Ta đã thấy rằng bánh xe *lăn* (có thể bị trượt nhưng không nhảy cóc !) và chuyển động này được xác định khi sử dụng các hệ thức §**2.3**, với vectơ quay của sự lăn $\vec{\Omega}_r = \dot{\theta}\vec{e}_z$.

Nếu người đi xe đạp muốn thay đổi hướng thì quay ghi đông xe đạp và lúc đó cho thêm lên bánh xe một chuyển động quay thứ hai quanh trục (Oy) vuông góc mặt đất và xác định bởi vectơ $\vec{\Omega}_p = \dot{\varphi}\vec{e}_y$: người ta nói rằng bánh xe xoay quanh trục (Oy) (*h.*15).



H.15. *Bánh xe nhìn từ trên xuống.*

Chú ý rằng khi xoay bánh xe, vectơ quay của sự lăn $\vec{\Omega}_r$ thay đổi phương và nó cũng "xoay" (*h.*15).

Nếu khi thay đổi phương, người đi xe đạp nghiêng xe đạp để đảm bảo ổn định, ta có thể thêm vào đó chuyển động thứ ba là quay một góc ψ quanh trục nằm ngang nằm trong mặt bánh xe (*h.*16).

Như vậy cần ba góc để xác định chuyển động quay tổng quát hơn của bánh xe (vectơ quay tổng cộng $\vec{\Omega}$ của bánh xe là tổng hợp ba chuyển động quay nói trên) và khi đó *trục quay tức thời* có phương hướng thay đổi từng lúc.

Những kết quả này vẫn còn đúng đối với chuyển động tổng quát nhất của vật rắn, điều mà ta đã nói từ đầu chương.

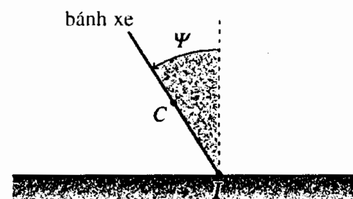
3 Các yếu tố động học : Các hệ thức tiêu biểu đối với một vật rắn

3.1. Sự quay của một vật rắn quanh một trục cố định

Xét một vật rắn $\mathcal{S}$ quay quanh một trục Δ gắn liền với vật rắn và cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ $(O;\, x,\, y,\, z)$. Thường xảy ra là *hệ quy chiếu nghiên cứu sẽ là hệ quy chiếu trọng tâm* $\mathcal{R}^*$ $(G;\, x,\, y,\, z)$, vì rằng khối tâm G gắn liền với vật rắn và cố định trong $\mathcal{R}^*$. Ta chọn trục (Oz) (hay (Gz) trong $\mathcal{R}^*$) trùng với trục quay Δ.

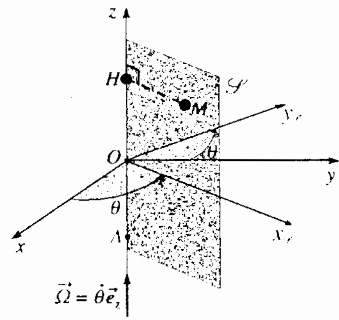
Trong chương này, ta giả thiết rằng vật rắn $\mathcal{S}$ có cấu tạo vật chất phân bố đều trong thể tích (điều này phù hợp với trường hợp thông dụng nhất) và kí hiệu :

$$m = \iiint_{\mathcal{S}} dm$$



H.16. *Nhìn từ đằng sau bánh xe.*

Tuy nhiên, tất cả các kết quả mà ta tìm được sẽ còn có giá trị đối với bất cứ cách phân bố khối lượng nào trong vật rắn (phân bố không liên tục, phân bố liên tục trên bề mặt hay trên một đường)



H.17. *Cánh cửa quay quanh bản lề.*

3.1.1. Momen động lượng tại một điểm của trục

Thí dụ vật rắn $\mathscr{S}$ là một cánh cửa như ở *hình* 17, hệ quy chiếu $\mathscr{R}_{\mathscr{S}}$ $(O; x_{\mathscr{S}}, y_{\mathscr{S}}, z_{\mathscr{S}})$ gắn với vật rắn, quay với vận tốc góc $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_z$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$.

Ta viết biểu thức của momen động lượng $\vec{L}_A$ của vật rắn này tại một điểm A cố định của trục (Oz) (A cũng là một điểm cố định trong hệ quy chiếu gắn liền vật rắn) trong $\mathscr{R}$:

$$\vec{L}_A = \iiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)\mathrm{d}m$$

với $$\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \Omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{AM}$$

Từ đó ta rút ra : $\vec{L}_A = \Omega \iiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{AM})\mathrm{d}m$, vậy :

$$\vec{L}_A = \Omega \iiint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{AM}^2\, \vec{e}_z - (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_z)\overrightarrow{AM})\mathrm{d}m .$$

Ta đưa vào điểm H là hình chiếu của M trên trục quay :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z + \overrightarrow{HM}$$

Vậy ta được : $\vec{L}_A = \vec{\Omega} \iiint_{\mathscr{S}} HM^2\mathrm{d}m - \Omega \iiint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_z)\overrightarrow{HM}\,\mathrm{d}m$,

vì $HM^2 = AM^2 - AH^2$.

Như vậy ta phân biệt trong biểu thức của $\vec{L}_A$ hai số hạng :

- một số hạng đồng tuyến với vectơ quay, đó là $\vec{L}_{A//} = \vec{\Omega} \iiint_{\mathscr{S}} HM^2\,\mathrm{d}m$;
- một số hạng vuông góc với vectơ quay :

$$\vec{L}_{A\perp} = -\Omega \iiint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_z)\overrightarrow{HM}\,\mathrm{d}m$$

Việc nghiên cứu các thành phần $\vec{L}_{A//}$ và $\vec{L}_{A\perp}$ là đối tượng nghiên cứu của hai chương tiếp theo.

3.12. Momen động lượng đối với trục Δ - Momen quán tính

Thành phần L_Δ trên trục quay $\vec{L}_A$ của momen động lượng Δ được gọi là momen động lượng của vật rắn $\mathscr{S}$ đối với trục Δ.

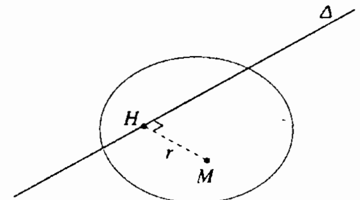
$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{e}_z = \vec{L}_{A//} \cdot \vec{e}_z = \Omega \iiint_{\mathscr{S}} HM^2\,\mathrm{d}m .$$

Theo định nghĩa, L_Δ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A trên trục Δ.

Khoảng cách $HM = r$ của điểm M đến trục quay Δ rõ ràng là không đổi khi vật rắn quay và người ta cũng định nghĩa momen quán tính J_Δ của vật rắn đối với trục quay Δ (*hình* 18) :

$$J_\Delta = \iiint_{\mathscr{S}} r^2\mathrm{d}m ,$$

đó là một đặc trưng của vật rắn (bất biến theo thời gian), chỉ phụ thuộc vào cách phân bố khối lượng trong vật rắn.



H.18. *Momen quán tính một vật rắn đối với trục Δ.*

Bảng dưới đây (*h.*19) cho biết momen quán tính của một số vật rắn thông dụng có khối lượng phân bố đều trong vật rắn.

Các kết quả này có được đơn giản bằng cách tích phân $J_\Delta = \iiint_{\mathcal{S}} r^2 \mathrm{d}m$.

Ví như đối với một thanh ở thí dụ thứ nhất :

$$J_\Delta = \frac{m}{2b}\int_{-b}^{b} r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{3}mb^2$$

Ta chú ý rằng, do định nghĩa, momen quán tính luôn luôn dương.

momen quán tính của thanh thẳng tiết diện không đáng kể chiều dài $2b$ khối lượng m đối với đường trung trực	Δ, b, b, G	$J_\Delta = \frac{1}{3}mb^2$
momen quán tính của vòng tròn tiết diện không đáng kể, bán kính R khối lượng m, đối với trục của nó	Δ, R, G	$J_\Delta = mR^2$ Ta có thể nghiệm lại lập tức kết quả này từ định nghĩa của J_Δ
momen quán tính của một cái đĩa hoặc hình trụ đặc bán kính R khối lượng m đối với trục của nó	Δ, R, G; Δ, G, R	$J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$
momen quán tính của hình cầu rỗng bán kính R khối lượng m, đối với đường kính của nó	Δ, R, G	$J_\Delta = \frac{2}{3}mR^2$
momen quán tính của một quả cầu đặc, bán kính R khối lượng m, đối với đường kính của nó	Δ, R, G	$J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2$

H.19. *Momen quán tính của một số vật rắn đơn giản.*

Chú ý :

- *Đôi khi người ta dùng bán kính con quay r_Δ của một vật rắn đối với trục Δ, xác định bởi $J_\Delta = mr_\Delta^2$.*
- *Theo định nghĩa momen quán tính có tính chất kết hợp : momen quán tính đối với một trục Δ của một vật rắn cấu tạo gồm hai phần bằng tổng momen quán tính của từng phần của $\mathcal{S}$.*
- *Với những lập luận đơn giản (thường dùng tính đối xứng của vật rắn) có thể xác định các momen quán tính chưa biết dựa vào một số momen quán tính đã biết.*
- *Áp dụng 3 sẽ làm sáng tỏ hai nhận xét cuối cùng.*

Áp dụng 3

Tính một số momen quán tính

Tính momen quán tính của những vật rắn dưới đây. Chúng có khối lượng m phân bố đều trong cả vật rắn.

a) *Một tấm vuông cạnh là b bề dày không đáng kể. Tính momen quán tính với đường trung tuyến (qua giữa hình vuông).*

b) *Một đĩa bán kính R. Tính momen quán tính đối với đường kính ;*

c) *Một nửa hình cầu bán kính R. Tính momen quán tính đối với đường kính nằm trong mặt của vòng tròn giới hạn bán cầu.*

a) Tấm vuông có thể được xem như do nhiều thanh song song xếp khít nhau (*h*.20) khối lượng dm và momen quán tính đối với Δ là $dJ_\Delta = \frac{1}{12}b^2 dm$ (chú ý ! thanh có độ dài *b* chứ không phải là 2*b* !), lấy tổng, ta có :

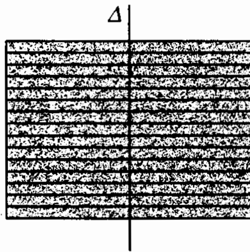
$$J_\Delta = \frac{1}{12}b^2 dm$$

b) Tổng momen quán tính đối với hai đường kính Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau cho momen quán tính của đĩa đối với trục của đĩa (*h*.21) : $H_1M^2 + H_2M^2 = MG^2$, từ đó :

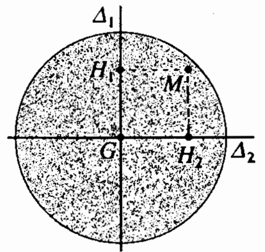
$$J_{\text{đường kính}} = J_{\Delta_1} = J_{\Delta_2} = \frac{1}{2}J_{\text{trục}} = \frac{1}{4}mR^2 .$$

c) Momen quán tính của bán cầu (*h*.22) đối với đường kính Δ là bằng một nửa của momen quán tính của cả hình cầu có khối lượng là 2*m* :

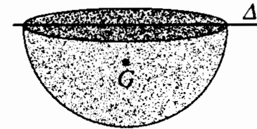
$$J = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}(2m)R^2\right] = \frac{2}{5}mR^2 .$$



H.20. *Momen quán tính của một tấm.*



H.21. *Momen quán tính của một đĩa.*



H.22. *Momen quán tính của một bán cầu.*

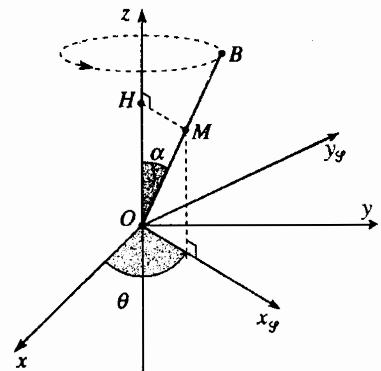
3.1.3. Momen động lượng của vật rắn tại một điểm của trục

Ta hãy làm phép phân tích này đối với một thí dụ đơn giản đó là thanh *OB*, đồng nhất, khối lượng *m* chiều dài *b*, nghiêng một góc α không đổi đối với trục Δ trùng với trục (*Oz*) của hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ (*O* ; *x*, *y*, *z*) ; thanh này quay với vận tốc $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z = \dot{\theta}\vec{e}_z$ quanh Δ (*h*.23). Các trục của hệ quy chiếu $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ (*O*; $x_\mathcal{S}$, $y_\mathcal{S}$, *z*) gắn với thanh được chọn sao cho thanh nằm trong mặt ($Ox_\mathcal{S}z$).

Kí hiệu *u* là khoảng cách của một điểm *M* nào đấy với thanh ở mút của *O* và xác định momen động lượng của thanh ở *O* ; ta có :

$$\vec{L}_{O//} = L_\Delta\vec{e}_z = J_\Delta\Omega\vec{e}_z = J_\Delta\vec{\Omega}$$

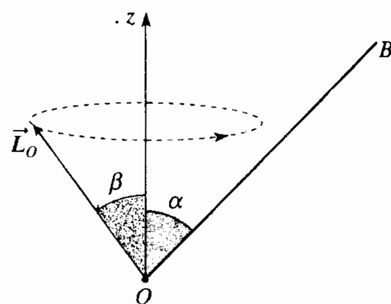
$$= \vec{\Omega}\int_\mathcal{S} HM^2 dm = \vec{\Omega}\frac{m}{b}\sin^2\alpha\int_0^b u^2 du = \frac{1}{3}mb^2\sin^2\alpha\vec{\Omega}$$



H.23. *Một thanh quay quanh (Oz).*

$$\vec{L}_{O\perp} = -\Omega \int_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{OM}.\vec{e}_z)\overrightarrow{HM}\,dm = -\vec{e}_{x\mathcal{S}}\Omega\frac{m}{b}\cos\alpha\sin\alpha\int_0^b u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}mb^2\cos\alpha\sin\alpha\,\Omega\vec{e}_{x\mathcal{S}}$$



H.24. *Chuyển động tuế sai của momen động lượng quanh trục (Oz).*

Người ta gọi *tích quán tính* $J_{x\mathcal{S}z}$ của thanh OB, lượng :

$$J_{x\mathcal{S}z} = \frac{1}{3}mb^2\cos\alpha\sin\alpha,$$

Momen động lượng ở O của thanh được viết ra là :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O//} + \vec{L}_{O\perp} = J_\Delta\vec{\Omega} - J_{x\mathcal{S},z}\,\Omega\vec{e}_{x\mathcal{S}}$$

Ta nhận thấy rằng vectơ $\vec{L}_O$ nằm trong mặt chứa thanh và trục quay ; nó quay quanh trục (Oz) cùng vận tốc $\vec{\Omega}$ của thanh (h.24). Góc β giữa (Oz) và $\vec{L}_O$ không đổi trong quá trình chuyển động và được xác định bởi :

$$\text{tg}\beta = \frac{L_{O\perp}}{L_{O//}} = -\frac{J_{x\mathcal{S},z}}{J_\Delta} = -\text{cotg}\alpha$$

($\vec{L}_O$ và $\overrightarrow{OB}$ trong trường hợp đặc biệt này vuông góc với nhau).

Đôi khi người ta nói rằng $\vec{L}_O$ có chuyển động *tuế sai* quanh trục (Oz).

Ta nhận xét thấy :

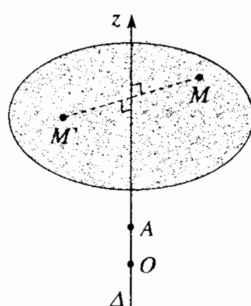
- khi $\alpha = 0$, thanh là đồng tuyến với trục quay (Oz) và momen động lượng $\vec{L}_O$ của thanh là bằng không ;
- khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thanh vuông góc với trục quay (Oz) và $\vec{L}_{O\perp}$ là bằng không và momen động lượng $\vec{L}_O$ của thanh là đồng tuyến với vectơ quay $\vec{\Omega}$.

Áp dụng 4

Trường hợp đặc biệt : momen động lượng và vectơ quay là đồng tuyến.

Một vật rắn $\mathcal{S}$ quay quanh trục Δ đồng tuyến với (Oz), cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}(O ; x, y, z)$ với vận tốc góc là Ω.

Chứng minh rằng momen động lượng $\vec{L}_A$ của vật rắn $\mathcal{S}$ ở một điểm A cố định của Δ là đồng tuyến với Ω nếu :



H.25. *(Oz) là một trục đối xứng của vật rắn.*

a) *Δ là một trục đối xứng của $\mathcal{S}$;*

b) *$\mathcal{S}$ là một vật rắn phẳng trong mặt vuông góc với Δ đi qua A.*

Ta sử dụng các kí hiệu trước đây. Chứng minh được $\vec{L}_{A\perp} = -\Omega\iiint_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{AM}.\vec{e}_z)\overrightarrow{HM}\,dm$ bằng không là đủ.

a) Đối với tất cả điểm M, có thể có tương ứng điểm M' đối xứng với M qua trục Δ. Sự tham gia của hai điểm này trong biểu thức tích phân dưới đây là bằng không vì :

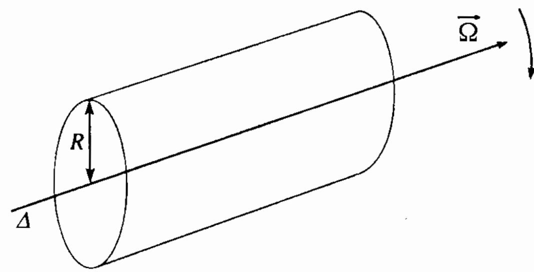
$$\overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{HM'} \text{ và } \overrightarrow{AM}.\vec{e}_z = \overrightarrow{AM'}.\vec{e}_z.$$

Tiếp theo lấy tổng trên cả tập hợp vật rắn các cặp điểm (M, M'), ta có :

$$\vec{L}_{A\perp} = \vec{0} \text{ và } \vec{L}_A = J_\Delta\vec{\Omega} = J_\Delta\Omega\vec{e}_z$$

Thí dụ : Đối với một rôto hình trụ, đồng nhất, có khối lượng m bán kính R quay quanh trục của nó (h.26) momen động lượng là bằng :

$$\vec{L}_A = \frac{1}{2}mR^2\vec{\Omega}$$

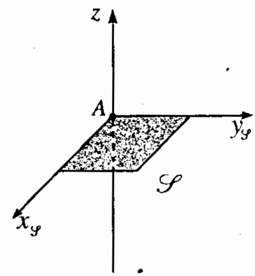


H.26. *Momen động lượng của hình trụ đồng nhất là đồng tuyến với* $\vec{\Omega}$.

b) Cho $(Ax_{\mathscr{S}}y_{\mathscr{S}})$ là mặt vuông góc với Δ (ở *hình* 27 $\mathscr{S}$ là một tấm chữ nhật).

Đối với mọi điểm M của tấm, $\overrightarrow{AM}.\vec{e}_z = \vec{0}$ và như vậy thì : $\vec{L}_{A\perp} = \vec{0}$

và $\vec{L}_A = J_\Delta \vec{\Omega} = J_\Delta \Omega \vec{e}_z$



H.27. *Δ vuông góc với tấm* $\mathscr{S}$ *tại A.*

Momen động lượng của vật rắn $\mathscr{S}$ đối với điểm cố định A trên trục quay cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathscr{R}$ là tổng của hai số hạng :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{A//} + \vec{L}_{A\perp}$$

$\vec{L}_{A//} = J_\Delta \vec{\Omega}$ là đồng tuyến với vectơ quay $\vec{\Omega}$.

Momen quán tính $J_A = \iiint_{\mathscr{S}} r^2 \mathrm{d}m$ là đặc trưng của vật rắn.

$\vec{L}_{A\perp}$ vuông góc với vectơ quay $\vec{\Omega}$ và có thể bằng không trong một số trường hợp đặc biệt. Thí dụ $\vec{L}_{A\perp}$ bằng không (*xem áp dụng* 4) :

- **khi trục quay trùng hợp với một trục đối xứng của vật rắn $\mathscr{S}$;**
- **khi vật rắn là phẳng trong mặt vuông góc với trục quay ở A.**

3.1.4. Động năng

Trong $\mathscr{R}$, động năng của $\mathscr{S}$ là $\mathscr{E}_K = \iiint_{\mathscr{S}} \frac{1}{2} v^2(M)\mathrm{d}m$, dùng những kí hiệu trước đây thì:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\iiint_{\mathscr{S}} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).\vec{v}(M)\mathrm{d}m \text{ hay } \mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\left[\iiint_{\mathscr{S}} (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M)\mathrm{d}m\right].\vec{\Omega}.$$

Ta cũng nhận lại được biểu thức của momen độnglượng $\vec{L}_A$ của $\mathscr{S}$, từ đó :

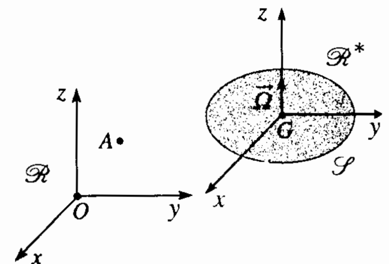
$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\vec{L}_A.\vec{\Omega} = \frac{1}{2}(\vec{L}_A.\vec{e}_z)\Omega = \frac{1}{2}L_\Delta.\Omega = \frac{1}{2}J_\Delta \Omega^2$$

Động năng $\mathscr{E}_K$ chỉ phụ thuộc vào momen động lượng $\vec{L}_\Delta$ của $\mathscr{S}$ đối với Δ (như vậy là phụ thuộc vào momen quán tính J_Δ) và không chịu ảnh hưởng của thành phần $\vec{L}_{A\perp}$ của momen động lượng.

3.2. Sử dụng các định lí KŒNIG

3.2.1. Momen động lượng và động năng của vật rắn

Để nghiên cứu chuyển động của vật rắn $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathscr{R}(O\ ;\ x,\ y,\ z)$, chúng ta đưa vào hệ tọa độ trọng tâm $\mathscr{R}^*(G\ ;\ x,\ y,\ z)$. Chúng ta giả thiết rằng *vectơ quay* $\vec{\Omega}$ *của vật rắn* (trong $\mathscr{R}$ hay là trong $\mathscr{R}^*$ sự quay của $\mathscr{S}$ là như nhau) luôn luôn bảo toàn phương hướng trong quá trình chuyển động, thí dụ phương hướng của trục (Oz).



H.28. *Chuyển động của vật rắn trong* $\mathscr{R}$ *và* $\mathscr{R}^*$.

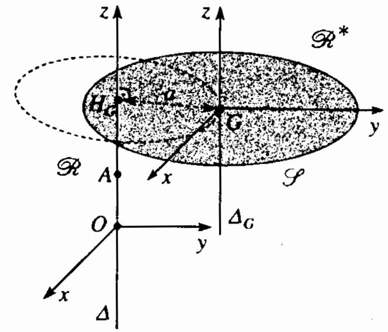
Trong $\mathscr{R}^*$, G là cố định và như vậy là $\mathscr{S}$ quay quanh trục (Gz) cố định.

Do đó, vận dụng các định lí KŒNIG ta có được :

$$\vec{L}_a = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}^*_G, \quad \text{với} \quad \vec{L}^*_G = \vec{L}^*_{G//} + \vec{L}^*_{G\perp} = J_{Gz}\vec{\Omega} + \vec{L}^*_{G\perp} \ ;$$

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv(G)^2 + \mathscr{E}^*_K, \quad \text{với} \quad \mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\vec{L}^*_G.\vec{\Omega} = \frac{1}{2}J_{Gz}\Omega^2.$$

J_{Gz} kí hiệu momen quán tính của vật rắn đối với trục (Gz) đi qua G và đồng tuyến với $\vec{\Omega}$.



H.29. *Định lý* HUYGENS.

Trong các biểu thức của momen động lượng hay của động năng của vật rắn $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathscr{R}$, ta chú ý có hai số hạng :

- một số hạng liên quan đến *chuyển động tịnh tiến toàn bộ* vật rắn $\mathscr{S}$:

$$\overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(G) \quad \text{hay} \quad \frac{1}{2}mv(G)^2 \ ;$$

- một số hạng khác liên quan đến *chuyển động quay của vật rắn* $\mathscr{S}$ *quanh quán tâm* G, trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$:

$$\vec{L}^*_G = J_{Gz}\vec{\Omega} + \vec{L}^*_{G\perp} \quad \text{hay} \quad \mathscr{E}^*_K = \frac{1}{2}J_{Gz}\Omega^2$$

Chú ý rằng $\vec{L}^*_{G\perp}$ bằng không nếu (Gz) là một trục đối xứng của $\mathscr{S}$ hay nếu $\mathscr{S}$ là phẳng trong mặt phẳng (Gxy).

3.2.2. Trường hợp đặc biệt quay quanh một trục cố định : định lí HUYGENS

Định lí HUYGENS cho phép liên hệ momen quán tính J_Δ của một vật rắn $\mathscr{S}$ đối với một trục Δ và $J_{\Delta G}$ của $\mathscr{S}$ đối với một trục Δ_G song song với Δ và đi qua quán tâm G. Ở đây ta xét cách chứng minh định lí này nhờ định lí KŒNIG liên quan đến động năng.

Giả sử rằng vật rắn $\mathscr{S}$ quay quanh trục cố định Δ trùng với trục (Oz) ở hệ nghiên cứu $\mathscr{R}$ với vận tốc Ω (*h*.29).

Trong $\mathscr{R}$, ta có thể viết $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2$.

Ngoài ra, trong $\mathscr{R}$, quán tâm G vạch nên một vòng tròn bán kính $a = H_GG$ (*hình* 29 : H_G là hình chiếu của G lên trục Δ) với vận tốc góc Ω và $v^2(G) = a^2\Omega^2$.

Trong $\mathscr{R}^*$, $\mathscr{S}$ quay quanh trục cố định Δ_G trùng với trục (Gz) đồng tuyến với Δ và ta có : $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J_{\Delta_G}\Omega^2$.

Định lí KŒNIG liên quan đến động năng $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv(G)^2 + \mathscr{E}^*_K$ trực tiếp dẫn đến định lí HUYGENS.

Momen quán tính của vật rắn $\mathscr{S}$ đối với trục Δ bằng tổng :

- **của momen quán tính vật rắn đối với trục Δ của một chất điểm giả định nằm ở G và có khối lượng bằng khối lượng tổng cộng của vật rắn ;**
- **của momen quán tính của vật rắn đối với trục Δ_G song song với Δ và đi qua G :**

$$J_A = ma^2 + J\Delta_G.$$

Áp dụng 5

Định lí HUYGENS

Chứng minh định lí HUYGENS bằng cách dùng :

a) *định lí KŒNIG đối với momen động lượng ;*

b) *một cách chứng minh hình học.*

a) Sử dụng các kí hiệu trước và kí hiệu A là điểm cố định của trục Δ (*h.*28), ta được :

• Trong $\mathcal{R}$: $L_\Delta = J_{\Delta_G}\Omega$.

Nhưng theo định lí KŒNIG :

$$\vec{L}_\Delta = \vec{L}_A.\vec{e}_z = (\overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G)).\vec{e}_z + \vec{L}_G^*.\vec{e}_z$$

với $v(G) = \Omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{AG}$, từ đó :

$$(\overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}(G)).\vec{e}_z = m(AG^2 - AH_G^2)\Omega = ma^2\Omega\ ;$$

• Trong $\mathcal{R}^*$:

$$\vec{L}_\Delta^* = \vec{L}_G^*.\vec{e}_z = J_{\Delta_G}\Omega \text{, từ đó } J_\Delta = ma^2 + J_{\Delta_G}$$

b) H và H_G là các hình chiếu của một điểm M của vật rắn tương ứng trên Δ và Δ_G, ta có (*hình* 30):

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{S}} HM^2 dm \text{ và } J_{\Delta_G} = \iiint_{\mathcal{S}} H_GM^2 dm$$

Nhưng $\overrightarrow{HM}^2 = (\overrightarrow{HH_G} + \overrightarrow{H_GM})^2$

$$= HH_G^2 + H_GM^2 + 2\overrightarrow{HH_G}\,.\,\overrightarrow{H_GM}$$

với $HH_G = a$ là khoảng cách giữa hai trục Δ và Δ_G và $\overrightarrow{HH_G}.\overrightarrow{H_GM} = \overrightarrow{HH_G}.\overrightarrow{GM}$ vì :

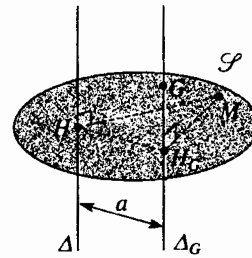
$$\overrightarrow{HH_G}.\overrightarrow{H_GG} = \vec{0}$$

Để ý rằng vectơ $\overrightarrow{HH_G}$ là độc lập với điểm M, từ đó lấy tổng cho cả vật rắn $\mathcal{S}$ ta suy ra :

$$J_\Delta = ma^2 + J_{\Delta_G} + 2\overrightarrow{HH_G}.\iiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{GM}\,dm$$

Số hạng cuối của biểu thức này bằng không theo định nghĩa của G, điều này cho phép ta viết :

$$J_\Delta = ma^2 + J_{\Delta_G}.$$



H.30. *Quan hệ giữa* J_Δ *và* $J_{\Delta G}$.

▶ **Để luyện tập : Bài tập 1 và 2.**

3.2.3. Sự quay quanh một trục có phương cố định : trường hợp bánh xe

Ta xét lại trường hợp bánh xe lăn (không xoay!) trên mặt đất nằm ngang đã nói ở §**2.3.2**. Ta xem bánh xe như một cái đĩa (hay như một hình trụ) đồng nhất có khối lượng m và bán kính b.

Trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*(C\ ;\ x,\ y,\ z)$ của bánh xe, bánh xe quay quanh trục (Cy) cố định trong $\mathcal{R}^*$ và như vậy ta có thể viết :

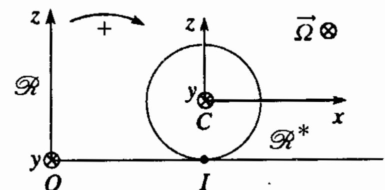
$$\vec{L}^* = \vec{L}_C^* = J\Omega\vec{e}_y\ , \quad \text{với} \quad J = J_{Cy} = \frac{1}{2}mb^2\ ;$$

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}J\Omega^2$$

Dùng định lí KŒNIG, ta suy ra trong $\mathcal{R}$:

$$\vec{L}_C = \vec{L}^* = J\Omega\vec{e}_y \text{ và } \mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv(C)^2 + \frac{1}{2}J\Omega^2$$

Ta có thể chú ý rằng $\vec{D}_C = \vec{D}_C^* = \vec{D}^* = J\dot{\Omega}\vec{e}_y$.



H.31. *Chuyển động của một bánh xe.*

Hơn nữa, nếu bánh xe lăn không trượt, ta có thể thấy rằng $\vec{v}(C)$ và $\vec{\Omega}$ liên hệ nhau bởi $\vec{v}(C) = \vec{\Omega} \wedge \vec{IC}$, từ đó $v^2(C) = b^2\Omega^2$ và $E_K = \frac{3}{4}mv^2(C)$ khi lấy $J = \frac{1}{2}mb^2$.

Chú ý :

Trong trường hợp lăn không trượt ta có thể nghiệm rằng :

$$\vec{L}_I = \vec{IC} \wedge m\vec{v}(C) + \vec{L}^* = (J + mb^2)\vec{\Omega} = J_{Iy}\vec{\Omega};$$

$$\vec{D}_I = \vec{IC} \wedge m\vec{a}(C) + \vec{D}^* = (J + mb^2)\dot{\Omega}\vec{e}_y = J_{Iy}\dot{\Omega}\vec{e}_y;$$

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}(J + mb^2)\Omega^2 = \frac{1}{2}J_{Iy}\Omega^2;$$

ở đây có $J_{Iy} = J + mb^2$ là momen động lượng của bánh xe đối với trục quay tức thời (Iy).

Như vậy mặc dầu trục quay tức thời không phải là cố định trong $\mathscr{R}$, ta tìm lại được các yếu tố động học của một vật rắn quay quanh trục cố định (bởi vì ở đây vận tốc của điểm tiếp xúc I_R của vật rắn là bằng không ở thời điểm tiếp xúc t).

Mặc dầu những hệ thức này có vẻ là đơn giản nhưng phải được sử dụng rất thận trọng và nhất là không nên mở rộng mà không suy nghĩ chín chắn trước (xem bài tập có giải 2 của chương 5).

▶ **Để luyện tập : bài tập 3.**

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ **Ở cơ học ta gọi vật rắn là vật không bị biến dạng : khoảng cách giữa hai điểm bất kì của vật rắn không thay đổi theo thời gian.**

■ **TRƯỜNG VẬN TỐC**

• **Các vận tốc của hai điểm bất kì P và M của một vật rắn trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ nghiệm đúng :**

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PM},$$

$\vec{\Omega}$ kí hiệu vectơ quay (tức thời) của vật rắn trong $\mathscr{R}$;

$\vec{\Omega}$ và $\vec{v}(P)$ là các tọa độ của toocxơ vận tốc hay toocxơ động.

• **Việc nghiên cứu chuyển động vật rắn trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ có thể phân tích thành:**

– nghiên cứu chuyển động của quán tâm của vật rắn trong hệ $\mathscr{R}$, thể hiện là chuyển động tịnh tiến của toàn bộ vật rắn ;

– nghiên cứu chuyển động của vật rắn trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$ tương ứng với một chuyển động quay quanh trục đi qua G.

■ MOMEN QUÁN TÍNH

Momen quán tính J_Δ của vật rắn $\mathcal{S}$ đối với một trục Δ là một đại lượng đặc trưng của vật rắn đó :

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{S}} r^2 \mathrm{d}m,$$

ở đây r là khoảng cách đến trục Δ của một điểm bất kì của vật rắn.

■ ĐỊNH LÝ HUYGENS

Momen quán tính của vật rắn $\mathcal{S}$ đối với trục Δ là bằng tổng :

- của momen quán tính đối với Δ của một chất điểm giả định nằm ở G và có toàn bộ khối lượng của vật rắn.
- của momen quán tính của vật rắn đối với một trục Δ_G song song với Δ và đi qua G :

$$J_\Delta = ma^2 + J_{\Delta G}$$

■ VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH Δ TRONG HỆ QUY CHIẾU $\mathcal{R}$

• *Momen động lượng*

Momen động lượng của vật rắn $\mathcal{S}$ đối với một điểm A cố định của trục quay Δ cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu $\mathcal{R}$ là tổng của hai số hạng :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_{A//} + \vec{L}_{A\perp},$$

$\vec{L}_A = J_A\vec{\Omega}$ là đồng tuyến với vectơ quay $\vec{\Omega}$; $\vec{L}_{A\perp}$ là vuông góc với vectơ quay $\vec{\Omega}$ và có thể bằng không trong một số trường hợp đặc biệt : nếu Δ là trục đối xứng của vật rắn $\mathcal{S}$ hay khi vật rắn $\mathcal{S}$ là phẳng và nằm trong mặt vuông góc với Δ ở A.

Thành phần L_Δ của momen động lượng $\vec{L}_A$ trên trục quay Δ được gọi là momen động lượng của vật rắn $\mathcal{S}$ đối với trục Δ :

$$L_\Delta = \vec{L}_A.\vec{e}_\Delta = \vec{L}_{A//}\vec{e}_\Delta = J_\Delta\vec{\Omega}.$$

• *Động năng*

Động năng của vật rắn $\mathcal{S}$ được cho bởi : $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\vec{L}_A.\vec{\Omega} = \frac{1}{2}L_\Delta\Omega = \frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2$.

■ VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CÓ PHƯƠNG CỐ ĐỊNH ĐỒNG TUYẾN VỚI (Oz) TRONG HỆ QUY CHIẾU $\mathcal{R}(O\,;x, y, z)$

• Momen động lượng

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(G) + \vec{L}_G^*,$$

với $\vec{L}_G^* = J_{G_z}\vec{\Omega} + L_{G\perp}^*$ trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*(G\,;x, y, z)$.

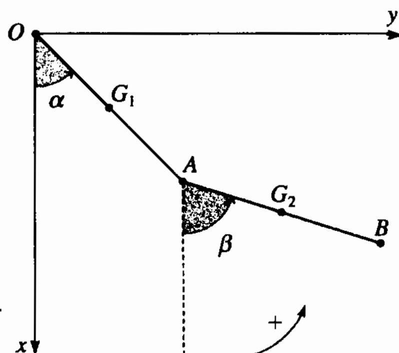
• Động năng

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv(G)^2 + \mathscr{E}_K^*, \text{ với } \mathscr{E}_K^* = \frac{1}{2}\vec{L}_G^*\vec{\Omega} = \frac{1}{2}J_{Gz}\Omega^2.$$

Bài tập có lời giải

Con lắc kép

ĐỀ BÀI



Một con lắc kép gồm hai thanh OA và AB giống nhau, đồng chất, có khối lượng m, chiều dài $2b$ và nối khớp ở A. Hai thanh bắt buộc phải dịch chuyển trong mặt thẳng đứng (Oxy) và độ nghiêng của chúng được xác định bởi các góc α và β so với đường thẳng đứng (Ox) đi xuống.

Tính momen động lượng ở O và động năng của con lắc kép này.

Nhớ rằng momen quán tính của một thanh có chiều dài $2b$ đối với đường trung trực của nó là $J = \frac{1}{3}mb^2$.

LỜI KHUYÊN :

Đừng dùng hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$ của hệ gồm hai thanh, vì :

- *quán tâm của tập hợp này không có chuyển động đơn giản ;*
- *chuyển động hai thanh trong $\mathcal{R}^*$ là rất phức tạp.*

Tính các yếu tố động học của từng thanh xét riêng rẽ và lấy tổng của các đại lượng thu được.

Thanh OA quay quanh điểm O cố định, các biểu thức của $\vec{L}_O$ và $\mathcal{E}_K$ là có được ngay.

Ta không biết thanh AB quay quanh điểm nào, vậy đối với thanh này nên ứng dụng các định lí KŒNIG.

BÀI GIẢI :

Thanh OA quay quanh trục (Oz) cố định ; định lý HUYGENS cho :

$$J_{Oz}(OA) = mb^2 + \frac{1}{3}mb^2 = \frac{4}{3}mb^2,$$

từ đó :

$$\vec{L}_O(OA) = J_{Oz}(OA)\dot{\alpha}\vec{e}_z = \frac{4}{3}mb^2\dot{\alpha}\vec{e}_z \ ;$$

$$\mathcal{E}_K(OA) = \frac{1}{2}J_{Oz}(OA)\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2.$$

Định lí KŒNIG cho phép tính các phần tử động học của thanh AB :

$$\vec{L}_O(AB) = \overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{v}(G_2) + J_{G_2z}(AB)\dot{\beta}\vec{e}_z \ ;$$

$$\mathcal{E}_K(OA) = \frac{1}{2}mv(G_2)^2 + \frac{1}{2}J_{G_2z}(AB)\dot{\beta}^2 \ ;$$

biết rằng : $\overrightarrow{OG_2}\begin{vmatrix} 2b\cos\alpha + b\cos\beta \\ 2b\sin\alpha + b\sin\beta \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{v}(G_2)\begin{vmatrix} -2b\sin\alpha\,\dot{\alpha} - b\sin\beta\,\dot{\beta} \\ 2b\cos\alpha\,\dot{\alpha} + b\cos\beta\,\dot{\beta} \\ 0 \end{vmatrix}$

và $J_{Gz}(AB) = J = \frac{1}{3}mb^2$

Ta có :

$$\vec{L}_O(AB) = \left[mb^2(4\dot{\alpha} + \dot{\beta} + 2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha - \beta)) + \frac{1}{3}mb^2\dot{\beta}\right]\vec{e}_z;$$

$$\mathcal{E}_K(AB) = \frac{1}{2}mb^2(4\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 4\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta)) + \frac{1}{6}mb^2\dot{\beta}^2$$

Đối với cả tập hợp con lắc kép :

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O(OA) + \vec{L}_O(AB) = mb^2\left[\frac{16}{3}\dot{\alpha} + \frac{4}{3}\dot{\beta} + 2(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos(\alpha - \beta)\right]\vec{e}_z;$$

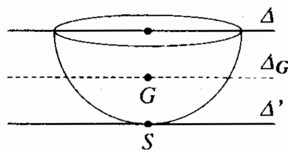
$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K(OA) + \mathcal{E}_K(AB) = mb^2\left[\frac{8}{3}\dot{\alpha}^2 + \frac{2}{3}\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta)\right].$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP GIÁO TRÌNH

1 Momen quán tính của một bán cầu

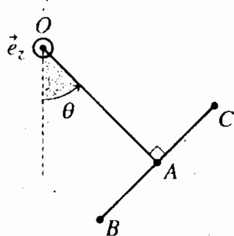
Momen quán tính của một bán cầu với đường kính Δ của nó bằng $J = \frac{2}{5}mR^2$.



Tính momen quán tính J' của bán cầu đối với trục Δ' đi qua đỉnh S và song song với Δ. Khoảng cách từ quán tâm G đến tâm C của hình cầu là $CG = \frac{3}{8}R$.

2 Momen động lượng của con lắc

Một con lắc $OABC$ dạng chữ T (tiết diện không đáng kể) đồng chất, được treo ở đầu mút O và có thể dao động trong mặt thẳng đứng quanh một trục nằm ngang Δ.

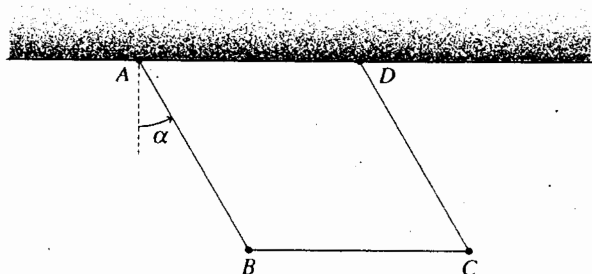


Xác định momen động lượng ở O theo hàm của vận tốc góc $\dot{\theta}$ của con lắc này. $OA = 2AB = 2AC = b$, OA và BC có cùng khối lượng. Nhớ lại rằng momen quán tính của một thanh có chiều dài b đối với trung trực là $J = \frac{1}{12}mb^2$.

3 Động năng của cái đu

Một cái đu được vẽ ở hình dưới đây : ba thanh giống nhau AB, BC và CD đồng nhất, có khối lượng m và chiều dài $2b$, có khớp nối ở B và C.

Chúng dịch chuyển trong mặt thẳng đứng vị trí của hệ được xác định theo góc α.



Tính động năng của hệ.

Nhớ lại rằng momen quán tính của một thanh đồng nhất khối lượng m chiều dài $2b$ đối với trung trực là $J = \frac{1}{3}mb^2$

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

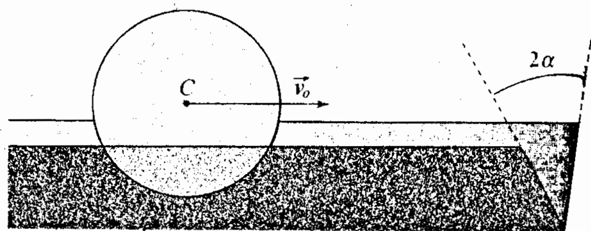
4 Xe ôtô rẽ ngoặt

Hai bánh xe trước của xe ôtô có song song với nhau hay không khi ôtô quay (không nhảy cóc!) quanh một trục thẳng đứng đi qua một điểm I cố định trên mặt đất nằm ngang ? Giả thiết rằng trong khoảng thời gian mà ta nghiên cứu sự quay của ôtô, người lái xe không quay vô lăng.

5 Quả cầu trên đường ray

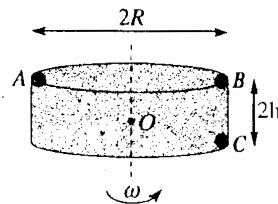
Một hòn bi hình cầu đồng chất có khối lượng m, bán kính R và momen quán tính $J = \frac{2}{5}mR^2$ đối với bán kính, lăn không trượt trên một đường ray có dạng nhị diện góc 2α.

Tính động năng của bi cầu này theo tốc độ v_0 của tâm cầu C.



6 Sự quay của một hình trụ quanh một trục cố định

Có một hình trụ đồng nhất tâm O khối lượng M bán kính R momen quán tính đối với trục của hình trụ là $J = \frac{1}{2}MR^2$ Người ta thêm trên hình trụ, ba khối điểm giống nhau A, B và C có khối lượng m như vẽ ở sơ đồ. (A, B và C



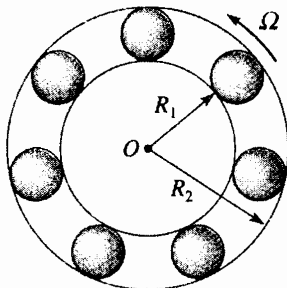
cùng nằm trên một mặt phẳng đi qua trục hình trụ). Hình trụ quay với tốc độ không đổi ω quanh trục cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu.

1) Tính động năng tổng và momen động lượng đối với O của hệ cấu tạo như nói trên. Từ đó suy ra động lượng tổng cộng và momen động lượng đối với O.

2) Những kết quả vừa tính sẽ bằng bao nhiêu nếu ta bỏ khối điểm C ?

7 Động năng của vòng bi

Một vòng bi gồm có n hòn bi hình cầu đồng chất khối lượng m. Vành trong có bán kính R_1 là cố định và vành ngoài (xem như hình trụ rỗng mà khối lượng M phân bố đều trên bề mặt bán kính R_2). Các hòn bi lăn không trượt cả trên vành trong và trên vành ngoài. Giả thiết là giữa các hòn bi không có tiếp xúc với nhau.



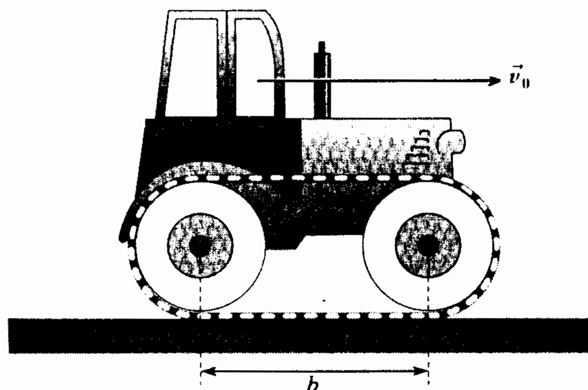
Cho biết :

- momen quán tính đối với đường kính của quả cầu đồng nhất khối lượng m và bán kính r : $J = \frac{2}{5}mr^2$;
- momen quán tính của vành ngoài $I = MR_2^2$.

Tính động năng của hệ phụ thuộc theo M, m, R_2 và vận tốc góc Ω.

8 Động năng của một máy kéo chạy xích

Xác định động năng của máy kéo gồm hai bánh hình trụ và một xích và dịch chuyển với vận tốc v_0 .



Khung vỏ máy kéo có khối lượng M : mỗi bánh xe có khối lượng m phân bố một cách đồng nhất, một bán kính R và một momen quán tính $J = \frac{1}{2}mR^2$ đối với trục của nó.

Xích (ta bỏ qua bề dày) là đồng nhất, có khối lượng m_c. Khoảng cách giữa các trục bánh xe bằng nhau và bằng b. Giả thiết rằng xích không trượt trên mặt đất cũng như không trượt trên bánh xe.

GIẢI

1 *Ta phải ứng dụng hai lần định lí HUYGENS để có J' khi đã có J :*

$J' = J_{\Delta G} + mSG^2 = (J - mCG^2) + mSG^2$, *vậy :*

$$J' = J + \frac{1}{4}mR^2 + \frac{13}{20}mR^2$$

2 *Đúng là ta đang ở trường hợp vật rắn phẳng quay quanh một trục vuông góc với mặt phẳng đó, vậy :* $\vec{L}_0 = J_\Delta \dot{\theta}\,\vec{e}_z$ *và vận dụng định lý Huygens cho từng phần ta có:*

$$J_\Delta = J_{\Delta,OA} + J_{\Delta,BC} = mb^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right) + mb^2\left(1+\frac{1}{12}\right) = \frac{17}{12}mb^2$$

3 *Đối với các thanh AB và DC quay quanh hai trục cố định vuông góc với mặt hình vẽ và đi qua A và D tương ứng, ta có :*

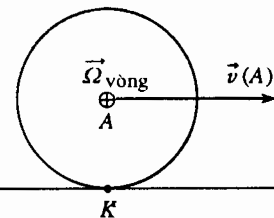
$$\mathscr{E}_K(AB) = \mathscr{E}_K(DC) = \frac{1}{2}\left(mb^2 + \frac{1}{3}mb^2\right)\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2$$

Đối với thanh BC chuyển động tịnh tiến, định lí KŒNIG cho :

$$\mathscr{E}_K(BC) = \frac{1}{2}mv(G_{BC})^2 = \frac{1}{2}mv(B)^2 = \frac{1}{2}m(2b)^2\dot{\alpha}^2$$

Vậy toàn bộ ta có : $\mathscr{E}_K = 2\mathscr{E}_K(AB) + \mathscr{E}_K(BC) = \frac{10}{3}mb^2\dot{\alpha}^2$.

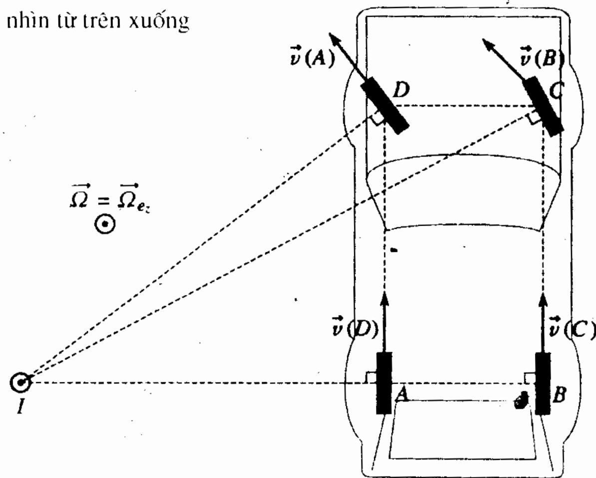
4 *Xét một bánh của xe, thí dụ bánh có tâm A ; mặt bánh xe tất yếu là phải chứa vectơ vận tốc $\vec{v}(A)$ của điểm A. Để thấy rõ điều này chỉ cần viết điều kiện để bánh xe quay mà không trượt : vectơ quay của bánh xe $\vec{\Omega}_{\text{bánh xe}}$ là đồng tuyến với trục bánh xe (điều này hiển nhiên đối với các bánh sau nhưng cũng đúng đối với bánh trước nếu theo giả thiết bánh xe không xoay), từ đó : $\vec{v}(A) = \vec{\Omega}_{\text{bánh xe}} \wedge \vec{KA}$ là nằm ngang trong mặt bánh xe. $\vec{v}(A)$ rõ ràng cũng là tốc độ của điểm A được xem là một điểm của "vật rắn" ôtô. Kí hiệu $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_z$ là vectơ quay của bánh xe ta có thể viết :*



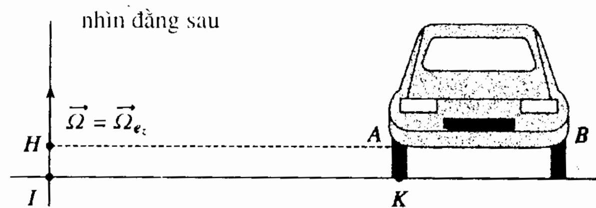
$$\vec{v}(A) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IA} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA}$$

điều này chứng tỏ $\vec{v}(A) \perp \overrightarrow{HA}$ và mặt bánh xe là vuông góc với $\overrightarrow{HA}$ ($\vec{v}(A)$ và $\overrightarrow{HA}$ là nằm ngang).

nhìn từ trên xuống



nhìn đằng sau



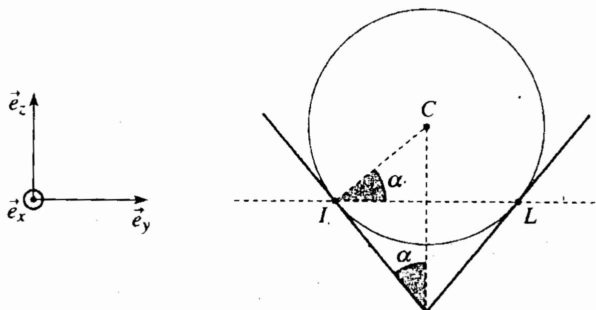
Tính chất nói trên là đúng đối với mỗi bánh xe, chúng ta cũng chú ý là trên sơ đồ "nhìn trên xuống" các bánh trước của ôtô không thể song song khi xe đang quanh (trong lúc người lái xe không quay vô lăng).

5 *Vì lăn mà không trượt, các điểm I và L được xem là các điểm của hòn bi, có tốc độ bằng không, từ công thức :*

$$\vec{v}(L,bi) = \vec{v}(I,bi) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IL}$$

có thể suy ra $\vec{0} = \vec{0} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IL}$ và điều này chứng tỏ vectơ quay $\vec{\omega}$ của bi là đồng tuyến với $\vec{e}_y$:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_y$$



Chúng ta đã có thể khẳng định trực tiếp kết quả này mặc dầu có vẻ là hiển nhiên. Ngoài ra, chúng ta cũng có :

$$\vec{v}(C) = v_0\vec{e}_x = \vec{v}(I,bi) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IC} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IC}$$

từ đó $v_0 = \omega R\sin\alpha$.

Chúng ta cũng suy ra được động năng của bi bằng cách dùng định lí KŒNIG :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}mv^2(C) + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 + \frac{2}{5\sin^2\alpha}\right)$$

Chú ý :

- *Trục quay tức thời của viên bi trùng với đường thẳng IL*
- *Chúng ta cũng có thể tính $\mathcal{E}_K$ theo :*

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}J_{IL}\omega^2$$

ở đây cần tính momen quán tính của viên bi đối với trục IL nhờ định lí HUYGENS : $J_{IL} = J + m(R\sin\alpha)^2$.

6 1) *Xét hệ quy chiếu $(O; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ gắn với vật rắn sao cho mặt $(O; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{z'})$ trùng với mặt ABC. Ta có :*

$$\vec{P} = M\vec{v}(O) + m(\vec{v}(A) + \vec{v}(B) + \vec{v}(C)) = m\vec{v}(C)$$

vì O là cố định và $\vec{v}(A) = -\vec{v}(B)$, nên $\vec{P} = mR\omega\vec{e}_{y'}$.

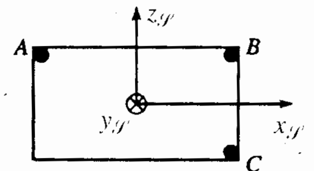
$$\vec{L}_0 = J\vec{\omega} + \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}(A) + \overrightarrow{OB} \wedge m\vec{v}(B) + \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{v}(C)$$

vậy $\vec{L}_0 = (J + 3mR^2)\vec{\omega} + mRh\omega\vec{e}_{x'}$,

sau đấy, lấy đạo hàm :

$$\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -mR\omega^2\vec{e}_{x'}$$

$$\vec{D}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = mRh\omega^2\vec{e}_{x'}$$



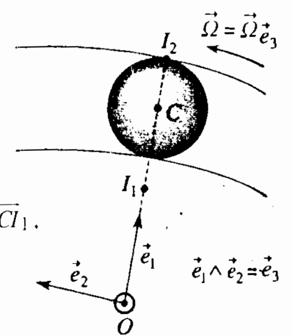
2) *Khi bỏ khối điểm ở C, có được $\vec{P} = \vec{0}$ và $\vec{S} = \vec{0}$.*

Quán tâm G của hệ nằm trên trục quay

$\vec{L}_0 = (J + 2mR^2)\vec{\omega}$ *và* $\vec{D}_0 = \vec{0}$.

Momen động lượng $\vec{L}_0$ là đồng tuyến với trục quay (trong trường hợp này ta có thể chú ý trục này là trục đối xứng của hệ).

7 *Ta xác định tốc độ quay $\vec{\omega}$ của mỗi viên bi. Dùng các kí hiệu như ở sơ đồ bên cạnh, ta diễn đạt những điều kiện lăn mà không trượt :*



- *Ở I_1, $\vec{v}(I_1, bi) = \vec{0} = \vec{v}(C) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CI_1}$,*

với $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$, từ đó :

$$\vec{v}(C) = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)\omega\vec{e}_2$$

- *Ở I_2, $\vec{v}(I_2, bi) = \vec{v}(I_2$, vành ngoài)*

vậy $\vec{v}(I_1, bi) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2} = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OI_2}$

và

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OI_2}$, từ đó $\omega(R_2 - R_1) = \Omega R_2$.

Ta suy ra $\vec{v}(C) = \frac{1}{2}\Omega R_2\vec{e}_2$.

Ta cũng có thể tính động năng của vòng bi :

$$\mathscr{E}_K = n\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv(C)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\right)}_{\text{bi}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\Omega^2}_{\text{vành ngoài}}, \text{ vậy } \mathscr{E}_K = \frac{1}{2}R_2\Omega^2\left(\frac{7}{20}nm + M\right)$$

8 *Thùng xe, khi chuyển động tịnh tiến có động năng :*

$$\mathscr{E}_K(\text{thùng xe}) = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

Mỗi bánh xe có động năng như nhau ; ta tính động năng của bánh xe tâm O_1.

Kí hiệu $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_y$ là vectơ quay của mỗi bánh xe, ta có :

$$\vec{v}(O_1) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AO_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AO_1}$$

vì $\vec{v}(A) = \vec{0}$, từ đó ta rút ra $v_0 = \omega R$.

Nhờ định lí KŒNIG, ta suy ra :

$$\mathscr{E}_K(\text{bánh xe}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{2}mv_0^2.$$

Ta xác định động năng của xích bằng cách đưa vào tỉ khối dài μ của xích xác định bởi : $m_c = \mu(2b + 2\pi R)$.

Phương pháp 1

- *Phần AB của xích tiếp xúc với mặt đất là bất động, động năng của phần này bằng không : $\mathscr{E}_K(AB) = 0$.*
- *Tất cả những điểm của phần ED của xích có cùng tốc độ như là tốc độ của điểm E (hoặc D) ; xích không trượt lên các bánh xe, ta có :*

$$\vec{v}(E) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AE} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AE}$$

từ đấy ta rút ra : $\vec{v}(E) = 2v_0\vec{e}_x$ và $\mathscr{E}_K(ED) = \frac{1}{2}\mu b(2v_0)^2$.

- *Các phần (BCD) và (AFE) có cùng động năng ; thí dụ ta tính động năng của phần (AFE). Một điểm M của phần này (xác định bởi góc φ) có tốc độ :*

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M} = v_0\vec{e}_x + \omega\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{O_1M},$$

vì vậy $v(M)^2 = v_0^2 + \omega^2R^2 + 2v_0\omega R\sin\varphi = 2v_0^2(1 + \sin\varphi)$.

Ta suy ra :

$$\mathscr{E}_K(BCD) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}v^2(M)\mu R\,d\varphi = \mu\pi Rv_0^2.$$

Cuối cùng, động năng của xích là :

$\mathscr{E}_K(\text{xích}) = 2\mu v_0^2(b + \pi R)$; $\mathscr{E}_K(\text{xích}) = m_cv_0^2$

Phương pháp 2.

Áp dụng định lí KŒNIG cho xích, ta có :

$$\mathscr{E}_K(\text{xích}) = \frac{1}{2}m_cv_0^2 + \mathscr{E}_K^*(\text{xích})$$

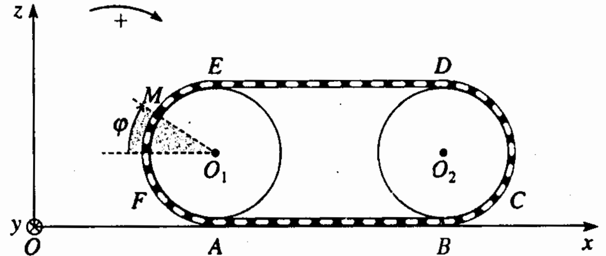
Hay trong hệ quy chiếu trọng tâm của xích, mỗi phần tử của xích có tốc độ cùng một độ lớn v_0, từ đó :

$$\mathscr{E}_K^*(\text{xích}) = \frac{1}{2}m_cv_0^2$$

và ta lại được $\mathscr{E}_K(\text{xích}) = m_cv_0^2$.

Ta suy ra đối với cả xe xích, động năng là :

$$\mathscr{E}_K = v_0^2\left(\frac{1}{2}M + \frac{3}{2}m + m_c\right).$$



3 NGHIÊN CỨU ĐỘNG LỰC CÁC HỆ CHẤT

MỤC TIÊU

- Mô hình hóa một tác động cơ học bất kì.
- Mở rộng các định luật cơ bản của động lực cho những hệ chất bất kì.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động lực học của chất điểm.
- Khái niệm cơ bản về toocsơ.

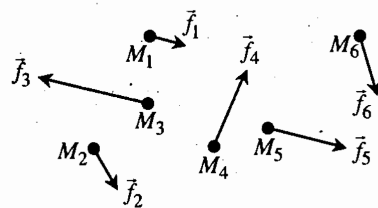
Mở đầu

Các định luật động lực xác lập quan hệ giữa chuyển động của một hệ chất với tác động cơ học lên hệ.

Trong chương này chúng ta tổng quát hóa cho hệ chất bất kì những định đề đối với chất điểm (hay đối với hệ chất điểm) đã được nói đến ở năm thứ nhất.

Để làm được điều đó, ta cũng phải tổng quát hóa khái niệm về lực : đối với một chất điểm, các vectơ, các lực đủ để mô tả toàn bộ các tác động cơ học lên điểm đó, nhưng đối với một hệ chất bất kì thì như vậy chưa đủ.

1 Mô hình hóa các tác động cơ



H.1. *Hệ các vectơ* $\vec{f}_i$.

1.1. Vài khái niệm cần thiết về toocsơ

Ta đã định nghĩa ở *chương* 1 toocsơ $\mathcal{T}$ ứng với một tập hợp vectơ $\vec{f}_i$ đi qua các điểm M_i (*h.*1). Tổng hợp $\vec{R}$ và momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ tại một điểm A của toocsơ đó là :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{f}_i \text{ và } \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{f}_i$$

$\vec{R}$ và $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ là các phần tử rút gọn của toocsơ $\mathcal{T}$ ở A.

Trong chương này các vectơ $\vec{f}_i$ kí hiệu đặc biệt là các lực tác dụng lên M_i.

1.1.1. Hệ các vectơ tương đương

Hai hệ vectơ $(M_i, \vec{f}_i)$ và $(M_i', \vec{f}_i')$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng toocsơ kết hợp :

$$\sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{f}_i' = \vec{R};$$

$$\sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{f}_i = \sum_i \overrightarrow{AM}_i' \wedge \vec{f}_i' = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A .$$

1.1.2. Cộng hai toocsơ

Xét hai hệ vectơ : hệ $(M_{1i}, \vec{f}_{1i})$ mà ta kết hợp với toocsơ $\mathcal{T}_1$, có các phần tử rút gọn ở A là $\vec{R}_1$ và $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1A}$ và hệ $(M_{2i}, \vec{f}_{2i})$ mà ta kết hợp với toocsơ $\mathcal{T}_2$, có các phần tử rút gọn cũng ở A là $\vec{R}_2$ và $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2A}$. Hội nhập hai hệ vectơ rõ ràng là có toocsơ kết hợp là toocsơ $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ với các phần tử rút gọn ở A là :

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \text{ và } \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1A} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2A} .$$

1.1.3. Một số toocsơ đặc biệt

■ **Glitsơ**

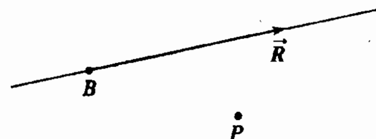
Glitsơ là một toocsơ mà tổng hợp $\vec{R}$ khác không, có một điểm B sao cho $\overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$ (*h.*2).

Điểm B thỏa mãn tính chất đó không phải là điểm duy nhất; tất cả các điểm B' sao cho BB' đồng tuyến với $\vec{R}$ cũng đều thỏa mãn.

Ở tất cả các điểm P khác, vectơ tổng hợp và momen cũng đều vuông góc vì :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_P = \overrightarrow{PB} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{PB} \wedge \vec{R} .$$

Như vậy đối với vectơ duy nhất $\vec{R}$ đi qua điểm B, ta có thể kết hợp với glitsơ $\mathcal{T}(\vec{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \vec{0})$.



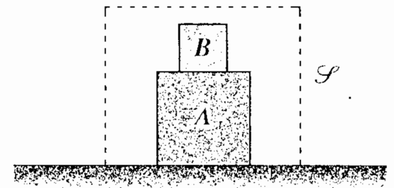
H.2. *Glitsơ* $\mathcal{T}(\vec{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \vec{0})$.

■ **Ngẫu lực**

Ngẫu lực là một toocsơ mà tổng hợp $\vec{R}$ bằng không; lúc đó bất kể là các điểm A và A' như thế nào ta có $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A'}$.

Momen của một ngẫu lực là đều như nhau.

1.2. Tác động cơ ngoại và nội



H.3a. *𝒮 là do hai vật A và B tạo thành.*

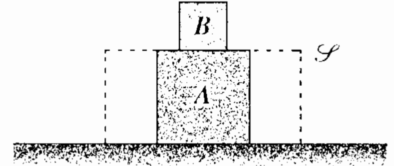
Tất cả nguyên nhân chuyển động của một hệ chất 𝒮 được gọi là *tác động cơ* (hay là lực) tác dụng lên hệ 𝒮.

Trong các tác động cơ, người ta phân biệt :

- tác động qua khoảng cách (như là trọng lượng, lực điện...) nói chung là biết được ;
- tác động tiếp xúc, nói chung là không biết được (nhưng có thể xác định khi biết được chuyển động của hệ đang xét).

Ngoài ra có thể phân loại tác động cơ :

- *tác động cơ ngoại* ở đây môi trường ngoài 𝒮 tác động lên 𝒮 hoặc trên bất cứ phần nào của 𝒮;
- *tác động cơ nội* ở đây một phần nào đó của 𝒮 tác dụng lên phần khác của 𝒮.



H.3b. *𝒮 chỉ bao gồm vật A.*

Rõ ràng là cách phân loại này là tương đối với hệ đang xét.

Như vậy, xét *hình* 3a : 𝒮 là hệ do hai vật A và B đặt trên mặt đất.

Tác động trên 𝒮 là :

- các trọng lượng của A và B, đó là các tác động cơ ngoại, kiểu tác động qua khoảng cách;
- tác động của mặt đất lên A, đó là tác động cơ ngoại kiểu tiếp xúc;
- tác động của B lên A và tác động của A lên B đó là các tác động cơ nội kiểu tiếp xúc.

Ở *hình* 3b : 𝒮 chỉ gồm một mình vật A, A chịu các tác động :

- trọng lượng của A đó luôn luôn là tác động cơ ngoại kiểu tác động qua khoảng cách.
- tác động của mặt đất đó là tác động cơ ngoại, kiểu tiếp xúc.
- tác động của B lên A, đó là một tác động cơ ngoại, kiểu tiếp xúc.

Trong thí dụ ta vừa nêu, ta không đề cập đến các tác động liên kết nội bộ giữa các phần tử của vật A cũng như của vật B (đó cũng là các tác động cơ nội) vì xét chúng không có lợi ích gì, sau này ta sẽ thấy.

1.3. Toocsơ của các tác động cơ ngoại

Ta quan tâm đến các tác động cơ ngoại, tác động lên hệ chất 𝒮. Ta bắt đầu bằng những thí dụ cổ điển.

1.3.1. Trọng lượng của một hệ

Hệ chất 𝒮 có khối lượng m và quán tâm G được đặt trong trọng trường $\vec{g}$ *giả thiết là đồng nhất*; kí hiệu khối lượng riêng của hệ là $\rho(M)$, mỗi phần tử có thể tích $d\tau$ chịu một tác động cơ ngoại, kiểu tác động qua khoảng cách đặc trưng bởi lực nguyên tố :

$$d\vec{F} = \vec{g}\rho(M)d\tau$$

Ta có thể tính :

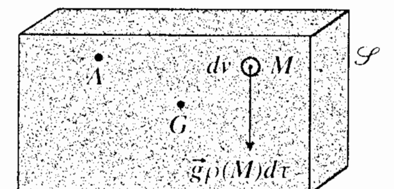
- tổng hợp toàn bộ lực nguyên tố :

$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{S}} \vec{g}\rho(M)d\tau = \vec{g}\iiint_{\mathcal{S}} \rho(M)d\tau = m\vec{g}\ ;$$

- momen tổng hợp tại một điểm A của tất cả các lực nguyên tố :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \iiint_{\mathcal{S}} \vec{AM} \wedge \vec{g}\rho(M)d\tau = \left[\iiint_{\mathcal{S}} \vec{AM}\rho(M)d\tau\right] \wedge \vec{g} = \vec{AG} \wedge m\vec{g}$$

theo định nghĩa của khối tâm G.



H.4. *Trọng lượng của hệ.*

Tác động cơ ngoại, đó là trọng lượng của hệ $\mathcal{S}$, tương đương với một lực duy nhất $\vec{F} = m\vec{g}$ tác dụng lên G (hay nói chặt chẽ hơn, phương của $\vec{F}$ đi qua G). Do vậy, G còn được gọi là trọng tâm của hệ $\mathcal{S}$. Ta nên nhớ rằng điều này chỉ đúng khi ta giả thiết trọng trường $\vec{g}$ là đồng nhất.

Ta nhận xét rằng tác động cơ ngoại, tức là trọng lượng, có đầy đủ các tính chất của một toocsơ đặc biệt, đó là glitsơ mà :

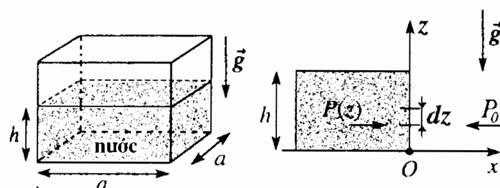
- tổng hợp là bằng $\vec{F} = m\vec{g}$.
- momen ở G bằng không $\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0}$.

Áp dụng 1

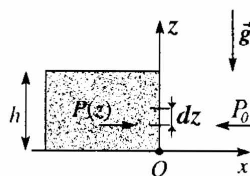
Các lực nén lên thành bình.

Ta xét một bình hình lập phương có cạnh là a chứa nước đến độ cao h và khối lượng riêng ρ là đồng nhất (h.5).

Chứng minh rằng tác động của các lực nén lên thành bình thẳng đứng có thể đặc trưng bởi một glitsơ mà ta có thể cho biết các đặc trưng.



H.5. *Lực nén lên thành bình.*



H.6. *Áp lực ở bên này và bên kia thành bình.*

Trên mặt dS = a dz nằm ở cạnh z của một thành bình (h.6) có các tác động :

- một bên là áp suất khí quyển.

$$-P_0\, \mathrm{d}S\vec{e}_x;$$

- một bên là áp suất nước :

$$P(z)\mathrm{d}S\vec{e}_x = [P_0 + \rho g(h-z)]\mathrm{d}S\vec{e}_x;$$

vậy tổng cộng :

$$\mathrm{d}\vec{F} = \rho g(h-z)a\,\mathrm{d}z\vec{e}_x.$$

Ta có thể tính tổng hợp các lực nén :

$$\vec{F} = \int_0^h \rho g(h-z)a\,\mathrm{d}z\vec{e}_x = \rho g a\frac{h^2}{2}\vec{e}_x;$$

và momen ở O của các lực nén :

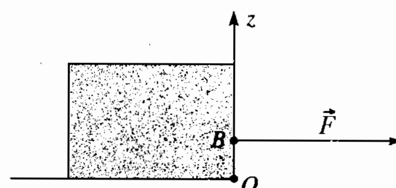
$$\vec{\mathcal{M}}_O = \iint_{\text{mặt}} z\vec{e}_z \wedge \mathrm{d}\vec{F} = \int_0^h z\rho g(h-z)a\,\mathrm{d}z\vec{e}_y$$

$$= \rho g a\frac{h^3}{6}\vec{e}_y.$$

Ta nhận thấy rằng tổng hợp lực và momen là vuông góc với nhau và ta có thể xác định một điểm B của cạnh b của thành bình sao cho :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OB} \wedge \vec{F}$$

Ta tìm được $b = \frac{h}{3}$.



H.7. *Tổng hợp các lực nén.*

Ở đây cũng vậy, tác động các lực nén lên thành bình cũng được đặc trưng bằng một lực duy nhất $\vec{F}$ đi qua điểm B.

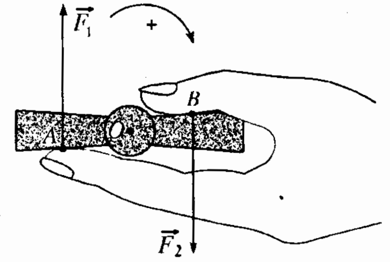
Vậy đấy là một glitsơ mà các phần tử rút gọn ở B là :

$$\vec{F} = \rho g a\frac{h^2}{2}\vec{e}_x$$

và

$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}.$$

1.3.2. Ngẫu lực tác động lên một hệ quay quanh một trục cố định



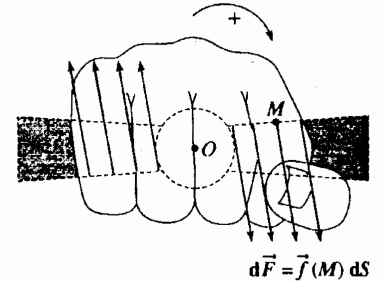
H.8. *Quay tay nắm cửa sổ.*

Ta quay tay nắm cửa sổ : bàn tay (nói đúng hơn ngón cái và ngón trỏ ở hình 8) thực hiện lên tay nắm hai lực : $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$, hai lực này trước hết (sau này ta sẽ giả thiết) là đối nhau.

Toàn bộ tác động cơ ngoại kiểu tiếp xúc (với tay nắm) được đặc trưng bởi :

- một lực tổng hợp : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.
- một momen ở O, điểm của trục tay nắm : $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_2 \neq \vec{0}$.

Chắc chắn là momen này khác không và ta có thể đặc trưng toàn bộ tác động cơ bằng một ngẫu lực có momen $\vec{\mathcal{M}}_O$ đồng tuyến với trục tay nắm và làm quay tay nắm. Ta nhớ lại rằng momen của một ngẫu lực không phụ thuộc điểm O ta dùng để tính : $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{C}$.



H.9. *Tay nắm không quay được một cách nhẹ nhàng.*

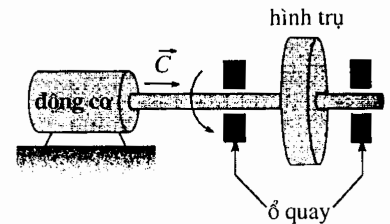
Ta cũng có thể quay tay nắm bằng cách nắm chặt cả bàn tay (*h.*9). Lúc đó ta xem bàn tay tác động tập hợp các lực nguyên tố $d\vec{F} = \vec{f}(M)dS$ với định nghĩa $\vec{f}(M)$ là mật độ bề mặt của lực tại điểm M trên bề mặt.

Tổng hợp $\vec{F}$ của tập hợp lực này là bằng không, còn momen tổng hợp $\vec{\mathcal{M}}_O$ khác không :

$$\vec{F} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(M)dS = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}(M)dS = \vec{C} \neq 0 .$$

Tác động cơ tổng hợp còn lại là ngẫu lực với momen $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{C}$ đồng tuyến với trục của tay nắm.



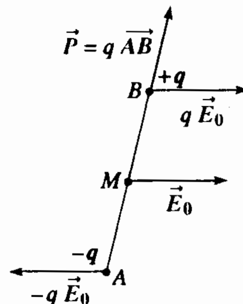
H.10. *Động cơ tác động lên hình trụ một ngẫu lực có momen $\vec{C}$.*

Cũng vậy, một động cơ (*h.*10) tác động lên hình trụ một tác động cơ tương tự với một ngẫu lực có momen $\vec{C}$ đồng tuyến với trục quay chung của môtơ và của hình trụ.

Áp dụng 2

Tác động của điện trường lên lưỡng cực

Tính tác động cơ của một điện trường đều $\vec{E}_0$ lên một lưỡng cực điện gồm hai điện tích trái dấu q và −q (h.11).



H.11. *Tác động của điện trường đều lên lưỡng cực.* ▶

- Lực tổng hợp : $\vec{F} = q\vec{E}_0 - q\vec{E}_0 = \vec{0}$.
- Momen tổng hợp :

$$\vec{\mathcal{M}}_M = \overrightarrow{MA} \wedge (-q\vec{E}_0) + \overrightarrow{MB} \wedge (q\vec{E}_0)$$

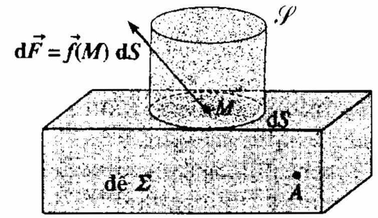
$$= q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

ở đây ta đưa kí hiệu $\vec{p} = q\overrightarrow{AB}$ là momen lưỡng cực của lưỡng cực.

Như vậy tác động của trường đồng nhất là một ngẫu lực có momen :

$$\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

1.3.3. Toocsơ của các tác động kiểu tiếp xúc giữa hai vật rắn



H.12. *Các tác động kiểu tiếp xúc giữa các vật rắn $\mathscr{S}$ và Σ.*

Có một hệ chất rắn $\mathscr{S}$ tiếp xúc với một đế rắn Σ không thuộc về hệ chất $\mathscr{S}$: như vậy là có tương tác giữa các hạt của $\mathscr{S}$ và các hạt của Σ ở chỗ mặt tiếp xúc S (*h.*12). Như ở phần trước, ta thừa nhận là có thể định nghĩa mật độ bề mặt $\vec{f}(M)$ của lực tại từng điểm tiếp xúc. Vậy tác động cơ kiểu tiếp xúc mà Σ thực hiện lên $\mathscr{S}$, tức là từ ngoài tác dụng lên $\mathscr{S}$ bao gồm :

- tổng hợp lực : $\vec{F}_{\Sigma \to \mathscr{S}} = \iint_S \vec{f}(M)\,dS$;
- momen tại một điểm A : $\vec{M}_{A,\,\Sigma \to \mathscr{S}} = \iint_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\,dS$.

Ta nhận xét rằng hai phần tử này độc lập đối với nhau và đặc trưng cho một toocsơ, toocsơ các tác động kiểu tiếp xúc của Σ lên $\mathscr{S}$, đó là tác động cơ ngoại lên $\mathscr{S}$.

Rõ ràng là $\mathscr{S}$ thực hiện lên Σ một tác động cơ mà ta cũng có thể biểu diễn bằng một toocsơ có tổng hợp lực $\vec{F}_{\mathscr{S} \to \Sigma}$ và momen $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,\mathscr{S} \to \Sigma}$.

1.3.4. Tổng kết

Qua những thí dụ mà chúng ta đã chọn, ta nhận xét rằng tất cả tác động cơ ngoại lên một hệ $\mathscr{S}$ có thể biểu diễn bởi một toocsơ (có khi là một glitsơ hay là một ngẫu lực) xác định bởi các phần tử rút gọn tại một điểm :

- tổng hợp lực : $\vec{F}_{ext}$;
- momen : $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$ (nhớ rằng $\vec{\mathscr{M}}_{B,\,ext} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_{ext} + \vec{M}_{A,\,ext}$).

Đó là kết quả chúng ta sẽ công nhận.

<u>*Chú ý :*</u>

Rất nhiều tác động cơ có thể biểu diễn bằng các glitsơ, đến nỗi chúng ta thường dùng chữ lực để đặc trưng kiểu tác động cơ này bằng cách nói rõ điểm đặt của lực đó và quên thuật ngữ glitsơ.

Ở đây có khác với điều mà chúng ta đã làm ở năm thứ nhất, vì ở năm đó tác động cơ lên một chất điểm M luôn luôn được sơ đồ hóa bằng một lực $\vec{F}$ đi qua điểm M (như vậy một glitsơ), ta đôi khi lại tính momen của lực này đối với một điểm khác : $\vec{\mathscr{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$.

*Ta không quên rằng trong trường hợp tổng quát của một toocsơ xác định một tác động cơ ngoại nào đó, tổng hợp $\vec{F}_{ext}$ và momen $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$ đối với điểm A là hai đại lượng hoàn toàn độc lập và **nhất là $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$ không phải là momen của $\vec{F}_{ext}$.***

1.4. Các tác động cơ nội

Khi một hệ chất $\mathscr{S}$ là liên tục, không phải luôn luôn có thể biểu diễn các hiệu ứng của các tác động cơ nội lên hệ này bằng một toocsơ.

Việc mô tả những tác động này khá phức tạp, vượt qua khuôn khổ của giáo trình. Ngược lại, có thể phân tích $\mathscr{S}$ ra thành hai phần $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$ tương tác giữa $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$ là nội đối với $\mathscr{S}$, trở thành các tác động cơ ngoại lên $\mathscr{S}_1$ hoặc lên $\mathscr{S}_2$ và như vậy là có thể được biểu diễn bằng các toocsơ.

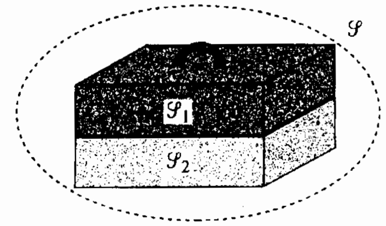
Xét một hệ $\mathscr{S}$ gồm hai vật rắn $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$, chất liệu cấu tạo mỗi vật phân bố liên tục (*h.*13).

Trong các tác động cơ nội đối với $\mathscr{S}$, ta có thể phân biệt :

• tác động cơ nội ở $\mathscr{S}_1$, nghĩa là các tác động liên kết giữa các phần khác nhau của $\mathscr{S}_1$;

• tác động cơ nội ở $\mathscr{S}_2$, nghĩa là các tác động liên kết giữa các phần khác nhau của $\mathscr{S}_2$.

• các tác động tiếp xúc của $\mathscr{S}_1$ lên $\mathscr{S}_2$ và các tác động tiếp xúc của $\mathscr{S}_2$ lên $\mathscr{S}_1$.



H.13. *Hệ $\mathscr{S}$ gồm có hộp $\mathscr{S}_1$ và cái nắp $\mathscr{S}_2$.*

Các tác động cơ liên kết nội bộ ở $\mathscr{S}_1$ cũng như ở $\mathscr{S}_2$ không thể biểu diễn bằng một toocsơ.

Ngược lại, các tác động tiếp xúc của $\mathscr{S}_1$ lên $\mathscr{S}_2$ hoặc của $\mathscr{S}_2$ lên $\mathscr{S}_1$ là hoàn toàn được mô tả bởi hai toocsơ vì ta có thể nghiên cứu riêng rẽ $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$ và lúc bấy giờ các tác động nói trên trở thành là các tác động ngoại.

Tiếp theo đây ta sẽ thấy là ta không gặp khó khăn khi không sơ đồ hóa được các tác động cơ về liên kết nội đối với những hệ như $\mathscr{S}_1$ hay $\mathscr{S}_2$. Thật vậy, các tác động này không ảnh hưởng gì đến các định luật cơ bản của động lực học mà ta sẽ dùng.

Chú ý :

Nếu hệ chất $\mathscr{S}$ là gián đoạn (thí dụ một hệ chất điểm) tất cả lực nội có thể biểu diễn bằng một toocsơ vì luôn luôn có thể chia nhỏ $\mathscr{S}$ sao cho lực nội bộ trở thành tác động cơ ngoại lên một hệ con của $\mathscr{S}$.

2 Định luật động lực trong hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$

Ta xét một *hệ chất khép kín $\mathscr{S}$* (không trao đổi chất với môi trường ngoài bao quanh hệ), có khối lượng m (là một đặc trưng của hệ) và có quán tâm G, chuyển động trong hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$.

2.1. Phát biểu nguyên lí cơ bản

Trong một hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$, toocsơ động lực $\mathscr{T}_d$ của hệ chất khép kín $\mathscr{S}$ bằng toocsơ $\mathscr{T}_{f_{ext}}$ của các tác động cơ ngoại tác dụng lên hệ :

$$\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_{f_{ext}}$$

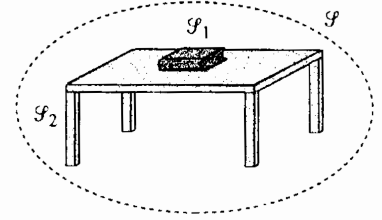
Phát biểu này tổng quát hoá các định luật ứng với chất điểm cho trường hợp một hệ chất bất kì. Ta có thể chú ý rằng các tác động cơ nội không xuất hiện trong phát biểu của nguyên lí cơ bản, điều mà ta đã được lưu ý ở §**1.4**.

Định luật nói trên dẫn đến hai định luật vectơ *độc lập* với nhau, đó là đối tượng của §**2.3** và §**2.4** :

• một định luật về tổng hợp lực của hai toocsơ : *định lí về tổng hợp động lực;*

• một định luật về momen của hai toocsơ : *định lí về momen động lực.*

2.2. Định luật về tác động và phản tác động



H.14. *Hệ $\mathcal{S}$ gồm hai hệ : quyển sách $\mathcal{S}_1$ và cái bàn $\mathcal{S}_2$.*

Định luật này còn được gọi là *định luật của những tác động qua lại.* Xét hai hệ $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ tương tác nhau trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$ và ta gọi $\mathcal{S}$ là hệ bao gồm $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ (*h.*14).

Các tác động cơ ngoại thực hiện lên $\mathcal{S}_1$ là do :

- môi trường bên ngoài $\mathcal{S}$ thể hiện là toocsơ $\mathcal{T}_{f_{ext},1}$;
- hệ $\mathcal{S}_2$, thể hiện là toocsơ $\mathcal{T}_{f,2\to1}$.

Cũng vậy các tác động cơ ngoại thực hiện lên $\mathcal{S}_2$ là do :

- môi trường bên ngoài $\mathcal{S}$, đó là toocsơ $\mathcal{T}_{f_{ext},2}$;
- hệ $\mathcal{S}_1$, đó là $\mathcal{T}_{f,1\to2}$.

Áp dụng nguyên lí cơ bản trong $\mathcal{R}$:

- đối với $\mathcal{S}_1$: $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{f_{ext},1} + \mathcal{T}_{f,2\to1}$;
- đối với $\mathcal{S}_2$: $\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{f_{ext},2} + \mathcal{T}_{f,1\to2}$;
- đối với $\mathcal{S}$: $\mathcal{T}_{d} = \mathcal{T}_{f_{ext},1} + \mathcal{T}_{f_{ext},2}$.

vì tương tác cơ giữa $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ là bên trong của $\mathcal{S}$.

Vì với hệ $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d_1} + \mathcal{T}_{d_2}$, ta suy ra :

$$\mathcal{T}_{f,2\to1} = -\mathcal{T}_{f,1\to2}$$

đó là *định lí tác động và phản tác động* được trực tiếp suy ra từ nguyên lí cơ bản.

Phát biểu của định lí như sau :

Toocsơ của các tác động cơ thực hiện bởi hệ $\mathcal{S}_1$ lên hệ $\mathcal{S}_2$ là đối nghịch với toocsơ mà $\mathcal{S}_2$ thực hiện lên $\mathcal{S}_1$:

$$\mathcal{T}_{f,2\to1} = -\mathcal{T}_{f,1\to2}.$$

Định lí tác động và phản tác động dẫn đến hai hệ thức vectơ độc lập :

- về các tổng hợp lực : $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$;
- về các momen : $\vec{\mathcal{M}}_{A,f,1\to2} = -\vec{\mathcal{M}}_{A,f,2\to1}$.

2.3. Định lí về tổng hợp động lực

Định lí này còn có tên gọi là *định lí về tổng hợp động lượng* hay *định lí về quán tâm,* cũng còn gọi là *định lí về động lượng.*

Biết tổng hợp động lực $\vec{S} = m\vec{a}(G)$ của hệ chất khép kín $\mathcal{S}$ là bằng đạo hàm của tổng hợp động lượng $\vec{P} = m\vec{v}(G)$ của $\mathcal{S}$, ta có thể phát biểu định lí này như sau :

Trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$, *tổng hợp động lực* $\vec{S}$ của một hệ chất khép kín $\mathcal{S}$ bằng tổng hợp $\vec{F}_{ext}$ của các tác động cơ ngoại tác dụng lên $\mathcal{S}$.

Đạo hàm đối với thời gian của *tổng hợp động lượng* $\vec{P}$ của một hệ chất kín $\mathcal{S}$ bằng tổng hợp $\vec{F}_{ext}$ của các tác động cơ ngoại tác dụng lên $\mathcal{S}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{S} = \vec{F}_{ext}, \text{ vậy } \frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}.$$

2.4. Định lí về momen động lực hay là định lí về momen động lượng

2.4.1. Phát biểu

Trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$, *momen động lực* $\vec{D}_A$ của một hệ chất kín $\mathcal{S}$ bằng momen $\vec{\mathcal{M}}_{A,\,ext}$ tại A của những tác động cơ ngoại tác dụng lên $\mathcal{S}$:

$$\vec{D}_A = \vec{\mathcal{M}}_{A,\,ext}.$$

Chú ý rằng các định lí về tổng hợp động lực và momen động lực là *độc lập* đối với nhau và momen động lực không phải là hệ quả của tổng hợp động lực (như vậy là khác với trường hợp chất điểm).

2.4.2. Định lí momen động lượng tại một điểm cố định của $\mathcal{R}$

Biết rằng momen động lực $\vec{D}_A$ của hệ chất khép kín $\mathcal{S}$ tại một điểm cố định của $\mathcal{R}$ là bằng đạo hàm theo thời gian của momen động lượng $\vec{L}_A$ của $\mathcal{S}$, ta có thể phát biểu :

Trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$, đạo hàm theo thời gian của *momen động lượng* $\vec{L}_A$ của hệ chất cô lập $\mathcal{S}$, đối với điểm A cố định của $\mathcal{R}$ bằng momen $\vec{\mathcal{M}}_{A,\,ext}$ đối với A của các tác động cơ ngoại tác dụng lên $\mathcal{S}$:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{D}_A = \vec{\mathcal{M}}_{A,ext} \text{ đối với } A \text{ cố định trong } \mathcal{R}.$$

2.4.3. Định lí momen động lượng đối với một trục cố định

Xét một trục Δ đi qua A với vectơ đơn vị $\vec{e}_\Delta$ cố định trong $\mathcal{R}$.

Chiếu định lí momen động lượng lên trục này, ta có định lí momen động lượng đối với trục Δ :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mu_{\Delta,\,ext}$$

ở đây kí hiệu $L_\Delta = \vec{L}_\Delta . \vec{e}_\Delta$ và $\mathcal{M}_{\Delta,\,ext} = \vec{\mathcal{M}}_{A,\,ext} . \vec{e}\Delta$ tương ứng với các thành phần chiếu lên trục Δ của $\vec{L}_A$ và $\vec{M}_{A,\,ext}$.

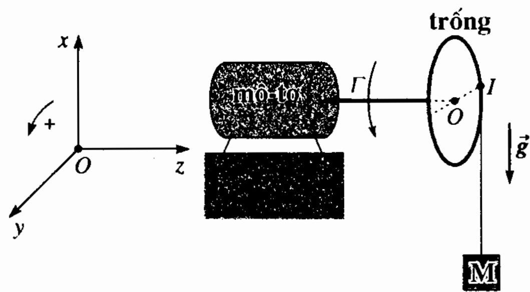
Áp dụng 3

Một cái tời kéo tải trọng

Hệ quy chiếu trái đất $\mathcal{R}$ xem như là hệ quy chiếu Galilé. Một cái tời mà trống quay xem như là một hình trụ tâm O (đó cũng là quán tâm), có bán kính R và có momen quán tính J đối với trục của nó. Nhờ một dây cáp (khối lượng không đáng kể) hoàn toàn mềm, quấn quanh trống quay, tời có thể kéo lên một tải trọng M có khối lượng m (h.15).

Trống có thể quay không ma sát quanh trục cố định trong $\mathcal{R}$; trống quay nhờ một động cơ tác động một ngẫu lực có momen Γ không đổi.

Xác định gia tốc thẳng đứng của tải trọng.



H.15. *Tời kéo tải trọng M.*

Hệ (trống + tải) chịu các tác động cơ ngoại như sau :

- trọng lượng trống đi qua O;
- các phản lực của trục : ta thừa nhận là nếu như không có ma sát, momen của chúng đối với trục quay của trống là bằng không (tính chất này sẽ được nghiên cứu ở *chương* 6);
- ngẫu lực của động cơ có momen $\vec{\Gamma}$ (đồng tuyến với trục quay) ;
- trọng lượng $m\vec{g}$ của tải trọng.

Đối với hệ, các lực căng của dây cáp là các tác động cơ nội.

Momen của hệ tại O, khi chiếu lên (Oz) có giá trị :

$$\mathcal{M}_{z,\text{ ext}} = \vec{\mathcal{M}}_O . \vec{e}_z = \Gamma - mgR$$

Vì dây cáp không trượt lên trống, tốc độ quay $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ của trống liên quan với tốc độ $\vec{v}$ của tải trọng bởi :

$$\vec{v} = \vec{v}(I) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OI} = R\omega \vec{e}_y$$

vì tốc độ của tải là bằng tốc độ của điểm I của cái trống (cáp không bị kéo dãn và không trượt lên trống).

Momen động lượng của hệ (trống + tải) đối với O là $\vec{L}_O = J\vec{\omega} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$, ở đây M là khối tâm của tải trọng (và với giả thiết rằng tải trọng không quay quanh M !), từ đây chiếu lên trục (Oz) ta được :

$$L_z = J\omega + mRv = \left(\frac{J}{R^2} + m\right)Rv .$$

Vận dụng định lí momen động lượng của hệ xét tại O cố định, chiếu lên (Oz) :

$$\frac{dL_z}{dt} = D_z = \left(\frac{J}{R^2} + m\right)Ra = \Gamma - mgR ,$$

Từ đây suy ra gia tốc a của tải trọng :

$$a = \frac{\Gamma - mgR}{\dfrac{J}{R^2} + m}$$

Ta nhận thấy rằng tải trọng sẽ thực sự được nâng lên nếu $\Gamma > mgR$.

2.5. Trường hợp một hệ cô lập

Một hệ cô lập (và kín) là không chịu một tác động cơ ngoại nào :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ ext}} = \vec{0} .$$

Ta suy ra rằng, trong hệ quy chiếu Galilé, tổng hợp động lượng $\vec{P}$ và momen động lượng $\vec{L}_A$ đối với một điểm cố định A của $\mathcal{R}$ của một hệ cô lập là không đổi :

$$\vec{P} = m\vec{v}(G) = \overrightarrow{\text{cte}} \quad \text{và} \quad \vec{L}_A = \overrightarrow{\text{cte}}$$

Các *định luật bảo toàn* này được thể hiện bằng các phương trình vi phân bậc nhất. Ta nhớ lại rằng, về mặt cơ học, tất cả phương trình vi phân bậc nhất được gọi là *nguyên hàm của chuyển động.*

Chú ý :

Tốc độ của quán tâm G trong trường hợp này là một hằng của chuyển động, hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$ là hệ quy chiếu Galilé. Hơn nữa, momen động lượng $\vec{L}^*$ của hệ trong $\mathcal{R}^*$ cũng là không đổi.

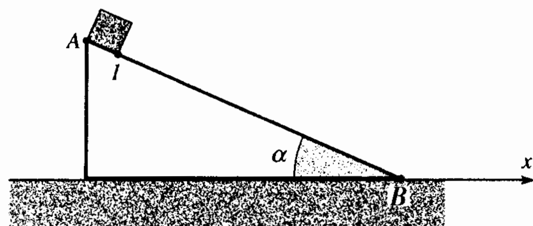
Trong một số trường hợp, hệ không phải là cô lập, có thể là một (hoặc nhiều) thành phần của $\vec{F}_{\text{ext}}$ hay là của $\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ ext}}$ (chứ không phải là tất cả) là bằng không. Định luật bảo toàn này sẽ là một (hoặc nhiều) hợp phần của $\vec{P}$ hay của $\vec{L}_A$ tương ứng được bảo toàn.

Áp dụng 4

Chuyển động của một hình lập phương trên một hình nêm.

Hệ quy chiếu Trái Đất xem như hệ quy chiếu Galilé. Một hình lập phương khối lượng m cạnh a đặt lên thành một hình nêm khối lượng 4m, góc α và cạnh AB = b như vẽ ở hình 16. Toàn bộ được giữ bất động.

Bây giờ người ta thả ra. Tính khoảng cách d mà hình nêm đi được khi hình lập phương đã trượt đến chỗ thấp nhất của hình nêm (cạnh I ở B) với giả thiết rằng không có bất kì ma sát nào giữa mặt đất nằm ngang và hình nêm.



H.16. *Hình lập phương trượt trên hình nêm.*

Hệ (nêm + lập phương) không phải là cô lập nhưng những tác động ngoại thực hiện lên hệ đều là thẳng đứng (trọng lượng của lập phương và của hình nêm, phản lực của đất lên hình nêm).

Vận dụng định lí tổng hợp động lượng lên toàn bộ hệ, và xét hình chiếu lên trục nằm ngang (Ox) :

$$4mv_{x(\text{nêm})} + mv_{x(\text{lập phương})} = \text{cte} = 0$$

Từ đó tích phân trong quãng từ thời gian đầu đến thời gian cuối, lúc mà I đã đến B (ta nên nhớ rằng $v_{x(\text{lập phương})}$ kí hiệu thành phần theo trục (Ox) của vận tốc lập phương đối với hệ quy chiếu Trái đất chứ không phải vận tốc lập phương đối với hình nêm) :

$$-4m\,\mathrm{d} + m(-\mathrm{d} + (\mathrm{b} - \mathrm{a})\cos\alpha) = 0$$

Như vậy hình nêm dịch chuyển một khoảng d theo chiều x âm, bằng :

$$d = \frac{1}{5}(b-a)\cos\alpha$$

Chú ý rằng để giải bài tập này, ta không đưa vào các tác động về tiếp xúc giữa khối lập phương và hình nêm, đó là những tác động nội. Còn vấn đề tiếp xúc dù có ma sát hay không vẫn không ảnh hưởng đến kết quả nếu ta giả thiết là hình lập phương thực sự chuyển động đến B (điều này xảy ra khi ma sát không lớn lắm, *xem chương* 5).

▶ **Để luyện tập : bài tập 1.**

2.6. Định lí momen động lượng đối với một điểm bất kì

A là một điểm cố định trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$, ta có $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{A,f_{\text{ext}}}$. N là một điểm bất kì của $\mathcal{R}$, dùng định luật về toocsơ, ta có thể viết :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{AN} \wedge \vec{P} + \vec{L}_N) = \overrightarrow{AN} \wedge \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{N,f_{\text{ext}}},$$

vậy : $\vec{v}(N) \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AN} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{AN} \wedge \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{N,f_{\text{ext}}},$

Biết rằng $\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}$, ta rút ra :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_N}{\mathrm{d}t} + \vec{v}(N) \wedge m\vec{v}(G) = \vec{\mathcal{M}}_{N,f_{\text{ext}}},$$

Và sử dụng momen động lực $\vec{D}_N$ đối với A :

$$\frac{d\vec{L}_N}{dt} + \vec{v}(N) \wedge m\vec{v}(G) = \vec{D}_N = \vec{\mathcal{M}}_{N,f_{ext}}.$$

Biểu thức này sẽ đơn giản hơn nếu N nằm ở quán tâm G của hệ $\mathcal{S}$ (hay trường hợp hiếm hơn, nếu các tốc độ của N và G là đồng tuyến); dầu rằng G có thể di chuyển trong $\mathcal{R}$ lúc đó ta có :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{D}_G = \vec{\mathcal{M}}_{G,f_{ext}}.$$

Đạo hàm của momen động lượng $\vec{L}_G$ là bằng momen đối với G của các ngoại lực.

Việc vận dụng định lí về momen động lượng đối với một điểm linh động N của $\mathcal{R}$ nói chung là tế nhị, phải nắm vững ở một mức độ nhất định các vấn đề cơ học trước khi vận dụng định lí.

Luôn luôn nên đưa về quán tâm G của hệ hoặc khi bài toán khả dĩ thì đưa về một điểm cố định.

Mặc dù vậy, ta chú ý rằng trực tiếp có được momen động lực $\vec{D}_N$ nhờ định lí KŒNIG dễ hơn là tính toán theo đạo hàm của momen động lượng $\vec{L}_N$.

3 Định lí momen động lượng trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$

$\mathcal{R}^*$ và $\mathcal{R}$ chuyển động tịnh tiến đối với nhau. Theo các định lí KŒNIG :

$$\vec{D}_G = \vec{D}_G^* \text{ và } \vec{L}_G = \vec{L}_G^*,$$

ta có thể rút ra :

$$\vec{\mathcal{M}}_{G,f_{ext}} = \vec{D}_G = \left(\frac{d\vec{L}_G}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{L}_G^*}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{L}_G^*}{dt}\right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{D}_G^*$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_G^*}{dt}\right) = \vec{D}_G^* = \vec{\mathcal{M}}_{G,f_{ext}}$$

Định lí momen động lượng vận dụng cho điểm G trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$ của hệ $\mathcal{S}$ như là đối với một điểm cố định trong hệ quy chiếu Galilé (mặc dầu hệ quy chiếu $\mathcal{R}^*$ không phải là Galilé).

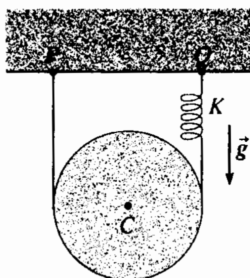
Kết quả này là đặc biệt quan trọng, vì trong $\mathcal{R}^*$, G là cố định và thường G là tâm đối xứng của hệ $\mathcal{S}$. Do đó các phép tính đối với $\vec{L}_G^*$ và lấy đạo hàm của nó là tương đối dễ và ta sẽ dùng định lí momen động lượng đối với G trong $\mathcal{R}^*$.

Ta nhớ lại rằng ta có thể kí hiệu momen động lượng và momen động lực của $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}^*$ mà không ghi rõ chỉ số G vì các momen này không phụ thuộc vào G. Cũng như trường hợp momen tính đối với điểm G của các lực ngoại, cứ để chỉ số đó vẫn hay hơn, nên ta vẫn viết $\vec{L}_G^*$ và $\vec{D}_G^*$ chứ không phải viết $\vec{L}^*$ và $\vec{D}^*$.

Áp dụng 5

Dao động của một hình trụ

Hệ quy chiếu Trái Đất được xem như là Galilé. Tính chu kì dao động thẳng đứng của tâm C của hình trụ đồng nhất (khối lượng m, bán kính R, momen quán tính đối với trục của hình trụ $J = \frac{1}{2}mR^2$) vẽ ở hình 17.



H.17. *Dao động của hình trụ.*

Sợi dây là không bị dãn, giả thiết là không có khối lượng và không đàn hồi, không trượt lên ròng rọc; lò xo có hệ số đàn hồi là k.

Ta kí hiệu y là độ dịch chuyển của tâm C đối với vị trí cân bằng của hệ và u là độ kéo dài phụ của lò xo cũng đo từ vị trí cân bằng của hệ (lúc cân bằng lò xo đã bị kéo dãn một lượng là l_0 do trọng lượng của hình trụ). Cuối cùng ta kí hiệu $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ là vận tốc quay của hình trụ.

Ta dùng các chú thích ở *hình* 18 :

• sợi dây không trượt trên ròng rọc, như vậy tốc độ của điểm A thuộc ròng rọc bằng tốc độ của điểm A thuộc sợi dây : $\vec{v}(A_{\text{ròng rọc}}) = \vec{v}(A_{\text{dây}})$;

• dây không bị kéo dãn, tốc độ điểm A của dây bằng tốc độ điểm treo P, như vậy là bằng không: $\vec{v}(A_{\text{dây}}) = \vec{v}(P) = \vec{0}$.

Như vậy ta có $\vec{v}(A_{\text{ròng rọc}}) = \vec{0}$. Ta viết :

• các hệ thức động học :

$\vec{v}(C) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AI}$, từ đó $\dot{y} = R\omega$;

$\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$, từ đó :

$$\dot{u} = 2R\omega = 2\dot{y} \text{ và } u = 2y;$$

• định lí về tổng hợp động lực chiếu lên (Oy) : $m\ddot{y} = -T - k(u + l_0) + mg$;

• định lí về momen động lượng đối với điểm C trong hệ quy chiếu trọng tâm của hình trụ chiếu lên trục quay cố định (Cz) (trong $\mathscr{R}^*$) :

$$J\,\dot{\omega} = \big(T - k(u + l_0)\big)R.$$

Tổ hợp các phương trình có được theo cách chỉ giữ biến số y, ta có : $\frac{3}{2}m\ddot{y} = -4ky - 2kl_0 + mg$, vậy :

$$\ddot{y} = -\frac{8k}{3m}y \text{ và khi cân bằng } 2k\,l_0 = mg.$$

Như vậy quán tâm của ròng rọc thực hiện các dao động hình sin thẳng đứng với tần số góc Ω, xác định bởi $\Omega^2 = \frac{8k}{3m}$, và với chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}.$$

▶ **Để luyện tập : bài tập 2**

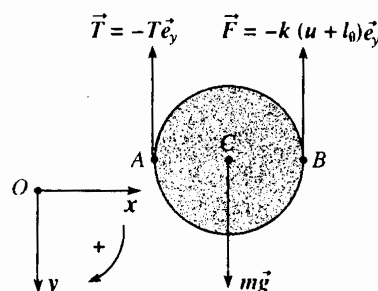
4 Định luật động lực trong hệ quy chiếu không Galilé $\mathscr{R}'$

4.1. Phát biểu định luật

Ta xét chuyển động của hệ $\mathscr{S}$, khép kín, có khối lượng m và quán tâm G trong hệ quy chiếu không Galilé $\mathscr{R}'$. Ta giả sử rằng hệ gồm những chất điểm M_i khối lượng m_i (*h.*19). Trong hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$ ta áp dụng cho hệ $\mathscr{S}$ những định lí về tổng hợp động lực và momen động lực đối với một điểm A' (cố định hoặc linh động trong $\mathscr{R}$) :

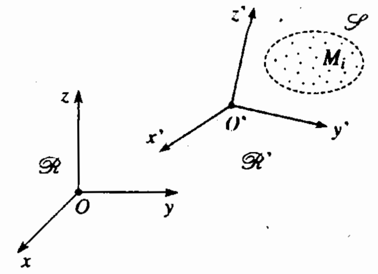
$$\vec{S} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}} = m\vec{a}(G)_{/\mathscr{R}} = \vec{F}_{\text{ext}} ;$$

$\vec{D}_{A'} = \sum_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge m_i\vec{a}(M_i)_{/\mathscr{R}} = \vec{\mathcal{M}}_{A',f_{\text{ext}}}$ với A' có thể là cố định hay không cố định trong $\mathscr{R}$.



H.18. *Các lực tác dụng lên hình trụ.*

Dùng luật hợp thành gia tốc áp dụng cho điểm M_i (hay cho điểm G) $\vec{a}(M_i)_{/\mathscr{R}} = \vec{a}(M_i)_{/\mathscr{R}'} + \vec{a}_e(M_i) + \vec{a}_C(M_i)$ ta có :



H.19. *Hệ $\mathscr{S}$ chuyển động trong $\mathscr{R}$ và $\mathscr{R}'$.*

■ **định lí tổng hợp động lực trong $\mathscr{R}'$**

$$\vec{S}' = \left(\frac{d\vec{P}'}{dt}\right)_{/\mathscr{R}'} = m\vec{a}(G)_{/\mathscr{R}'} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC},$$

với $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(G)$ lực quán tính kéo theo và $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(G)$ lực quán tính CORIOLIS.

Thực vậy, dễ dàng nghiệm thấy rằng :

$$\sum m_i\vec{a}_e(M_i) = m\vec{a}_e(G) \text{ và } \sum m_i\vec{a}_C(M_i) = m\vec{a}_C(G).$$

■ **định lí momen động lực đối với A' trong $\mathscr{R}'$**

$$\vec{D}'_{A'} = \sum_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge m_i\vec{a}(M_i)_{/\mathscr{R}'} = \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{ext}} + \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{ie}} + \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{iC}}$$

với $\vec{\mathscr{M}}_{A',f_{ie}} = -\sum_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge m_i\vec{a}_e(M_i)$ là momen ở A' của lực quán tính kéo theo và $\vec{\mathscr{M}}_{A',f_{iC}} = -\sum_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge \vec{a}_C(M_i)$ là momen ở A' của các lực quán tính CORIOLIS. Ngoài ra nếu A' là cố định trong $\mathscr{R}'$:

$$\vec{D}'_{A'} = \left(\frac{d\vec{L}_{A'}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}'} = \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{ext}} + \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{ie}} + \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{iC}}$$

Chú ý rằng trong trường hợp chung, $\vec{\mathscr{M}}_{A,f_{ie}}$ và $\vec{\mathscr{M}}_{A,f_{iC}}$ không biểu hiện trực tiếp là hàm của gia tốc kéo theo hay gia tốc CORIOLIS của G.

4.2. $\mathscr{R}'$ tịnh tiến đối với $\mathscr{R}$

Trường hợp đặc biệt hệ quy chiếu không Galilê $\mathscr{R}'$ tịnh tiến so với hệ quy chiếu Galilê $\mathscr{R}$ có thể là thú vị vì nó không kéo theo nhiều phép tính quá phức tạp. Thật vậy :

• gia tốc CORIOLIS của mọi điểm là bằng không và không có các tác động quán tính CORIOLIS.

• gia tốc kéo theo của một điểm M_i nào đó $\vec{a}_e(M_i) = \vec{a}(O')_{/\mathscr{R}}$ là không phụ thuộc điểm M_i và bằng gia tốc trong $\mathscr{R}$ của gốc O' của $\mathscr{R}'$, từ đó :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(O') \text{ và } \vec{\mathscr{M}}_{A',f_{ie}} = -\left(\sum_i m_i\overrightarrow{A'M_i}\right) \wedge \vec{a}(O') = -m\overrightarrow{A'G} \wedge \vec{a}(O')_{/\mathscr{R}}$$

Trường hợp này các lực quán tính kéo theo tạo nên một glitsơ đi qua G. Ta suy ra :

$$\vec{S}' = \left(\frac{d\vec{P}'}{dt}\right)_{/\mathscr{R}'} = m\vec{a}(G)_{/\mathscr{R}'} = \vec{F}_{ext} - m\vec{a}(O')_{/\mathscr{R}} ;$$

$$\vec{D}'_{A'} = \left(\frac{d\vec{L}_{A'}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}'} = \vec{\mathscr{M}}_{A,f_{ext}} - m\overrightarrow{A'G} \wedge \vec{a}(O')_{/\mathscr{R}} \text{ (đối với } A' \text{ cố định trong } \mathscr{R}').$$

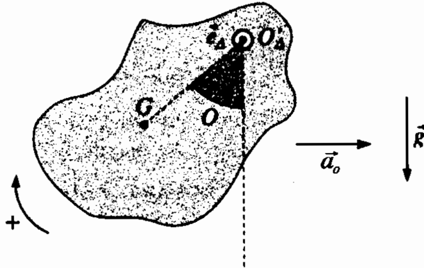
<u>*Chú ý :*</u> *Đặt trong trường hợp đặc biệt hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}' = \mathscr{R}^*$ đối với $A' = G$, ta tìm lại được định lí mômen động lượng ở* §3 :

$$\vec{D}^*_G = \left(\frac{d\vec{L}^*_G}{dt}\right)_{/\mathscr{R}^*} = \vec{\mathscr{M}}_{G,f_{ext}}$$

Áp dụng 6

Dao động của con lắc trong xe ô tô khi khởi động.

Một vật rắn có thể quay không ma sát quanh một trục Δ nằm ngang, cố định trong một chiếc ô tô. Ô tô khởi động trên một đường nằm ngang với gia tốc a_0 (h.20).



H.20. *Dao động của con lắc trong xe.*

Xác định chu kì của những dao động nhỏ của con lắc quanh vị trí cân bằng.

Người ta cho biết momen quán tính J của vật rắn đối với trục Δ, cũng như khoảng cách b giữa quán tâm G của vật rắn và trục Δ.

Vì không có tí ma sát nào, momen của những tác động tiếp xúc lên vật rắn về phía trục quay không có thành phần nào trên Δ (*xem chương* 6).

Định lí momen động lượng vận dụng đối với điểm O' cố định của Δ, với $\vec{e}_\Delta$ kí hiệu vectơ đơn vị của trục Δ cho ta :

$$J\ddot{\theta} = -mgb\sin\theta - \left(m\overrightarrow{O'G} \wedge \vec{a}_0\right).\vec{e}_\Delta$$

vậy $J\ddot{\theta} = -mgb\sin\theta + ma_0b\cos\theta$.

Vị trí cân bằng θ_0 của con lắc được xác định bởi :

$$\mathrm{tg}\theta_0 = \frac{a_0}{g} \ (\theta_0 \text{ trong khoảng giữa } O \text{ và } \frac{\pi}{2})$$

Đặt $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ với $\varepsilon \ll 1$; ε nghiệm đúng phương trình $J\ddot{\varepsilon} = -mb(g\cos\theta_0 + a_0\sin\theta_0)\varepsilon$, đặc trưng cho chuyển động hình sin với vận tốc góc Ω xác định bởi $\Omega^2 = \dfrac{mb(g\cos\theta_0 + a_0\sin\theta_0)}{J}$ và

chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mb\left(g\cos\theta_o + a_o\sin\theta_o\right)}}.$$

5 Trường hợp những hệ mở

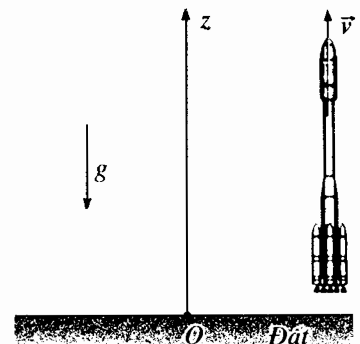
Có nhiều cách đi vào nghiên cứu những hệ mở, đó là hệ có trao đổi chất với môi trường bao quanh nó.

Qua hai thí dụ đơn giản (một thí dụ là hệ tịnh tiến, một thí dụ là hệ quay) ta đề xuất một giải pháp để nghiên cứu hệ kín.

5.1. Chuyển động của một tên lửa

Trong hệ quy chiếu địa tâm giả thiết là Galilé, ta xem chuyển động tịnh tiến của tên lửa đi theo trục (Oz), thẳng đứng, đồng tuyến với trọng trường Trái Đất $\vec{g}$, ta bỏ qua mọi biến thiên theo độ cao. Để đơn giản cách trình bày ta cũng bỏ qua lực cản của không khí (h.21).

Trong khi bay lên, tên lửa phụt ra đằng sau các sản phẩm khí do phản ứng hóa học giữa các loại nhiên liệu tên lửa mang theo; giá trị u của vận tốc khí phụt ra so với hỏa tiễn có thể giả thiết là không đổi.



H.21. *Một tên lửa tịnh tiến theo chiều thẳng đứng.*

Ta xét hệ kín gồm tên lửa, nhiên liệu, ở thời điểm t khối lượng tổng cộng là :

$$M(t) = M_0 + m(t)$$

với M_0 là khối lượng tên lửa (không có nhiên liệu) và $m(t)$ là nhiên liệu còn trong hỏa tiễn ở thời điểm t (khi xuất phát, tên lửa có khối lượng nhiên liệu là m_0). Vận dụng cho hệ này định lí động lượng chiếu lên trục (Oz) dưới dạng $(h.22)$:

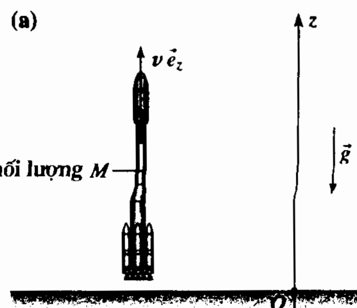
$$P(t + \mathrm{d}t) - P(t) = -M\, g\, \mathrm{d}\, t$$

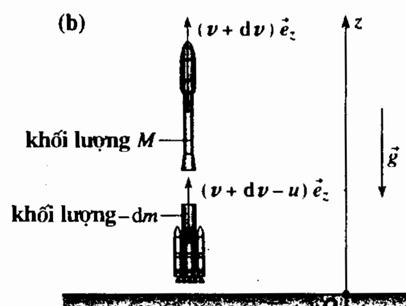
Ở thời điểm t, động lượng của hệ là :

$$P(t) = M\, v(t)\ ;$$

ở thời điểm $(t + \mathrm{d}t)$, động lượng cũng của hệ này bằng :

$$P(t + \mathrm{d}t) = \underbrace{(M + \mathrm{d}m)v(t + \mathrm{d}t)}_{\text{tên lửa}} + \underbrace{(-\mathrm{d}m)v(t + \mathrm{d}t) - u)}_{\text{khí phụt ra}}$$





H.22. *Hệ có khối lượng tổng cộng $M = M_0 + m$ trải qua hai thời điểm t và $t + \mathrm{d}t$ (chú ý là $\mathrm{d}m < 0$).*
a. *Ở thời điểm t.*
b. *Ở thời điểm $t + \mathrm{d}t$.*

vì rằng giữa các thời điểm t và $(t + \mathrm{d}t)$, một khối lượng $(-\mathrm{d}m)$ của khí đã phụt ra ($\mathrm{d}m$ là biến thiên khối lượng nhiên liệu, giá trị âm). Vận tốc của tên lửa ở thời điểm $t + \mathrm{d}t$ có thể biểu diễn là $v(t + \mathrm{d}t) = v(t) + \mathrm{d}v$.

Xét hiệu và bỏ qua số hạng bậc hai (có $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$), ta có $M\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}m\, u = -Mg\,\mathrm{d}t$ và ta có thể viết dưới dạng :

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Mg - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u\,.$$

Nếu chúng ta thừa nhận rằng hao hụt khối lượng $D = -\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > 0$ của khí phụt ra (khối lượng khí phụt ra trong một đơn vị thời gian) là không đổi khi tên lửa phóng lên, lúc đó $m = m_0 - D\mathrm{d}t$ và phương trình chuyển động sẽ là :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{D}{M_0 + m_0 - Dt}u - g\,.$$

Lấy tích phân ta có $v = v_0 - u\ln\left(\dfrac{M_0 + m_0}{M_0 + m_0 - Dt}\right) - gt$, ở đây v_0 là vận tốc hỏa tiễn lúc ban đầu.

Công thức đó cho ta nhận biết rằng muốn có vận tốc v lớn và lên độ cao thật cao, ta phải tăng khối lượng m_0 của hỗn hợp nhiên liệu, do đó phải tăng bình chứa, tức là tăng khối lượng M_0 của chính tên lửa.

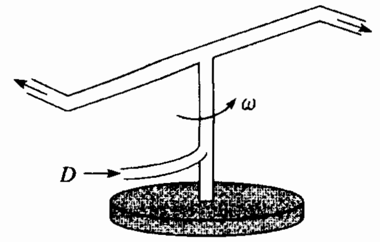
Để kết hợp cả hai mục tiêu mâu thuẫn với nhau này, người ta dùng tên lửa nhiều tầng (nói chung là ba tầng). Khi mà bình chứa hỗn hợp nhiên liệu một tầng đã hết nhiên liệu, người ta cho tầng này rời ra ; phần tên lửa còn lại sẽ nhẹ hơn, từ đó đạt được tốc độ lớn hơn.

Chú ý :

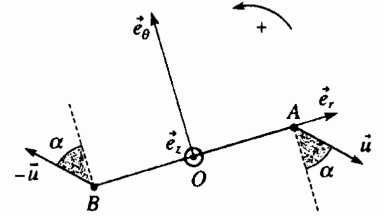
- *Quán tâm của hệ kín có khối lượng M đi xuống khi rơi tự do.*
- *Khi viết định lí động lượng ở thời điểm t dưới dạng $M\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Mg - \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u$, ta làm xuất hiện số hạng $-\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u$ như là một lực tác dụng lên tên lửa : tất cả xảy ra như là khi khí phụt ra tác dụng lên tên lửa một lực đẩy $-\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u$, điều này làm cho tên lửa được đẩy lên (ta không quên rằng, theo quy ước của chúng ta dm là âm).*

▶ **Để luyện tập : Bài tập 3.**

5.2. Nghiên cứu thiết bị tưới quay tròn



H.23 a. *Thiết bị tưới.*



H.23 b. *Sơ đồ hóa thiết bị nhìn từ trên xuống.*

Thiết bị này vẽ ở *hình* 23 : nước chảy vào ống thẳng đứng ở giữa, tiết diện nhỏ, có lưu lượng khối D không đổi. Nước tiếp tục chảy theo hai ống nằm ngang, giống nhau, quay ngược nhau tiết diện nhỏ và chiều dài b; nước phun ra ở các đầu ống qua lỗ hẹp, tiết diện s tốc độ tương đối là $\vec{u}$ hay $-\vec{u}$ so với cánh tay ngang và tạo thành một góc α không đổi so với đường vuông góc với cánh tay ngang, giá trị của u là không đổi.

Dưới tác dụng của tia nước phun ra, hai ống nằm ngang OA và OB quay quanh trục giữa thẳng đứng với tốc độ góc ω. Ta bỏ qua tất cả các loại ma sát.

Để xác định chuyển động của "cái quay" này, ta ứng dụng định lí momen động lượng chiếu lên trục quay thẳng đứng (Oz), đối với hệ kín gồm hai cánh tay OA và OB, nước chứa ở thời điểm t và khối lượng $\mathrm{d}m = D\,\mathrm{d}t$ của nước chứa trong ống ở giữa vừa chạy vào hai cánh tay OA và OB trong khoảng thời gian giữa t và $t + \mathrm{d}t$; ta viết định lí đó dưới dạng :

$$L_{(Oz)}(t+\mathrm{d}t) - L_{(Oz)}(t) = \mathcal{M}_{(Oz),\,\mathrm{ext}}\mathrm{d}t = 0$$

(momen của các ngoại lực ở đây có thành phần theo (Oz) bằng không).

Kí hiệu J là momen quán tính đối với trục (Oz) của hai ống OA và OB và nước chứa trong hai ống (J là không đổi trong quá trình chuyển động vì luôn luôn cả hai cánh tay này chứa cùng một lượng nước), momen động lượng đối với trục (Oz) của hệ kín được viết như sau :

• Ở thời điểm t : $L_{(Oz)}(t) = J\,\omega(t) = J\,\omega$ vì momen động lượng của lượng nước nhỏ dm chảy vào ống ở giữa là bỏ qua được ;

• Ở thời điểm $t + \mathrm{d}t$: một khối lượng $\mathrm{d}m = D\mathrm{d}t$ nước chứa trong hệ kín đã ra khỏi các ống, một nửa ở A một nửa ở B.

Ở A, tốc độ của nước này, so với hệ quy chiếu Trái Đất (giả sử là Galilé) là $\vec{v}(A) = b\omega\vec{e}_\theta + \vec{u} = u\sin\alpha\,\vec{e}_r + (b\omega - u\cos\alpha)\vec{e}_\theta$, và momen động lượng đối với trục (Oz) tương ứng là bằng :

$$\vec{e}_z.\left(\overrightarrow{OA} \wedge \frac{1}{2}\mathrm{d}m\,\vec{v}(A)\right) = \frac{1}{2}Db\left(b\omega - u\cos\alpha\right)\mathrm{d}t \;;$$

Rõ ràng là đối với lượng nước phun ra ở B cũng tính như trên.

Vậy :

$$L_{(Oz)}(t+\mathrm{d}t) = J\,\omega(t+\mathrm{d}t) + Db(b\omega - u\cos\alpha)\mathrm{d}t.$$

Từ đó ta có phương trình vi phân

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + Db^2\omega = Dbu\cos\alpha\,,$$

nếu ω bằng không ở thời điểm đầu, tích phân ta có :

$$\omega = \omega_0\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right)$$

với : $\omega_0 = \dfrac{u\cos\alpha}{b}$ và $\tau = \dfrac{J}{Db^2}$.

Ta không quên rằng thiết bị quay ngược với chiều nước ở các cánh tay ngang phun ra.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ CÁC TÁC ĐỘNG CƠ

• Tất cả tác động cơ ngoại lên một hệ $\mathscr{S}$ có thể biểu diễn bởi một toocsơ (đôi khi là một glitsơ hay một ngẫu lực) xác định bởi các phần tử rút gọn tại một điểm :

• tổng hợp lực : $\vec{F}_{ext}$;

• momen : $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$ (nhớ rằng $\vec{\mathscr{M}}_{B,\,ext} = \vec{BA} \wedge \vec{F}_{ext} + \vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$).

Trong trường hợp đặc biệt của glitsơ, tác động cơ quy lại thành một lực tác dụng lên một điểm cho trước.

• Khi hệ chất $\mathscr{S}$ là liên tục, không phải luôn luôn có thể biểu diễn các tác động cơ nội của hệ này bằng một toocsơ.

■ ĐỊNH LUẬT ĐỘNG LỰC TRONG HỆ QUY CHIẾU GALILÉ $\mathscr{R}$

• ***Nguyên lí cơ bản :***

Trong hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$, toocsơ động lực $\mathscr{T}_d$ của một hệ chất kín $\mathscr{S}$ bằng toocsơ của các tác động cơ ngoại tác dụng lên hệ đó :

$$\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_{f_{ext}}$$

Nguyên lí này dẫn đến hai định luật vectơ độc lập :

• ***Định lí về tổng động lực***

Trong một hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$, momen động lực $\vec{S}$ của một hệ chất kín $\mathscr{S}$ là bằng tổng $\vec{F}_{ext}$ của các tác động cơ ngoại tác động lên $\mathscr{S}$.

Đạo hàm theo thời gian của tổng động lượng $\vec{P}$ của một hệ chất kín $\mathscr{S}$ bằng tổng $\vec{F}_{ext}$ các tác động cơ ngoại tác dụng lên $\mathscr{S}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{S} = \vec{F}_{ext}\text{, vậy } \frac{d}{dt}(m\vec{v}(G)) = m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext}.$$

• ***Định lí về momen động lực***

Trong một hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$, momen động lực $\vec{D}_A$ của một hệ chất kín $\mathscr{S}$ là bằng momen $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$ đối với A của các tác động cơ ngoại thực hiện lên $\mathscr{S}$:

$$\vec{D}_A = \vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$$

• ***Định lí về momen động lượng đối với một điểm cố định của $\mathscr{R}$***

Trong hệ quy chiếu Galilé $\mathscr{R}$, đạo hàm đối với thời gian của momen động lượng $\vec{L}_A$ của hệ chất kín $\mathscr{S}$ đối với một điểm A cố định trong $\mathscr{R}$, là bằng momen $\vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext}$ đối với A của các tác động cơ ngoại tác động lên $\mathscr{S}$:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{D}_A = \vec{\mathscr{M}}_{A,\,ext} \text{ đối với } A \text{ cố định trong } \mathscr{R}.$$

• ***Định lí về momen động lượng đối với một điểm bất kì***

$$\frac{d\vec{L}_N}{dt} + \vec{v}(N) \wedge m\vec{v}(G) = \vec{\mathscr{M}}_{N,f_{ext}}.$$

■ ĐỊNH LÍ VỀ TÁC ĐỘNG VÀ PHẢN TÁC ĐỘNG

Toocsơ của các tác động cơ thực hiện bởi hệ $\mathcal{S}_1$ lên hệ $\mathcal{S}_2$ là đối nghịch với toocsơ mà $\mathcal{S}_2$ thực hiện lên $\mathcal{S}_1$.

Định lí tác động và phản tác động dẫn đến hai hệ thức vectơ độc lập đối với :

- các tổng hợp lực : $\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$;
- các momen : $\vec{\mathcal{M}}_{A,f,1\to2} = -\vec{\mathcal{M}}_{A,f,2\to1}$.

■ ĐỊNH LÝ VỀ MOMEN ĐỘNG LƯỢNG TRONG HỆ QUY CHIẾU TRỌNG TÂM $\mathcal{R}^*$

Định lí về momen động lượng áp dụng cho điểm G trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$ của hệ $\mathcal{S}$ xem như là đối với một điểm cố định trong hệ quy chiếu galilé (cho dầu là hệ quy chiếu $\mathcal{R}^*$ không phải là galilé) :

$$\left(\frac{d\vec{L}_G^*}{dt}\right)_{/\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{G,f_{ext}}$$

■ CÁC ĐỊNH LUẬT ĐỘNG LỰC TRONG HỆ QUY CHIẾU KHÔNG GALILÉ $\mathcal{R}'$

- ***Định lí về tổng hợp động lực trong $\mathcal{R}'$***

$$\vec{S}' = \left(\frac{d\vec{P}'}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = m\vec{a}(G)_{/\mathcal{R}'} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC},$$

trong đó $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(G)$ là lực quán tính kéo theo và $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(G)$ là lực quán tính CORIOLIS.

- ***Định lí momen động lực ở A' cố định trong $\mathcal{R}'$***

$$\vec{D}_{A'} = \left(\frac{d\vec{L}_{A'}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}'} = \vec{\mathcal{M}}_{A',f_{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{A',f_{ie}} + \vec{\mathcal{M}}_{A',f_{iC}}$$

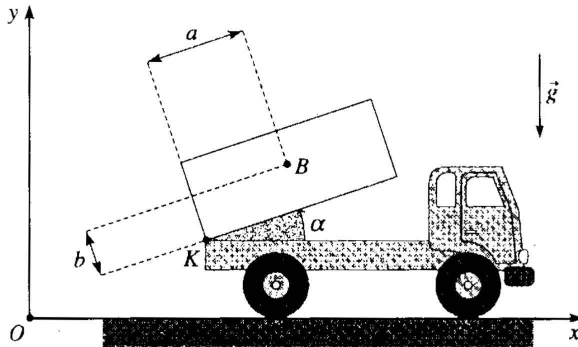
trong đó $\vec{\mathcal{M}}_{A,f_{ie}} = -\sum_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge m_i\vec{a}_e(M_i)$ là momen đối với A' của các lực quán tính kéo theo và $\vec{\mathcal{M}}_{A',f_{iC}} = \sum_i \overrightarrow{A'M_i} \wedge m_i a_C(M_i)$ là momen các lực quán tính CORIOLIS đối với A'.

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP GIÁO TRÌNH

1 Dịch chuyển trên mặt đất của xe ô tô tải

Người lái chiếc xe tải cho dừng xe trên một con đường nằm ngang (của một hệ quy chiếu Galilê), đã tắt động cơ nhưng quên phanh. Do đó thùng xe của xe tải bị đẩy lật nghiêng từ góc ban đầu $\alpha = 0$ đến góc $\alpha = \alpha_0$.



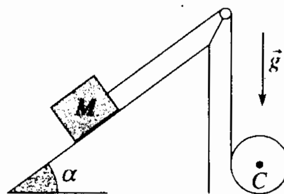
Xác định độ dịch chuyển của xe tải trên đường biết rằng khối lượng tổng cộng của xe tải (kể cả thùng xe) là bằng M; khối lượng của thùng xe là m và khối lượng bánh xe là không đáng kể. Vị trí của quán tâm B của thùng xe được xác định theo hai độ dài a và b.

Giả thiết rằng mỗi bánh xe có quán tâm C_k (trùng với tâm bánh xe) quay không ma sát quanh trục của nó và đồng tuyến với (Oz) (ta thấy ở chương 5 là các tác động tiếp xúc của bánh xe-trục có monen bằng không đối với trục quay) và mặt đất tác dụng lên bánh xe một lực $(T_k\vec{e}_x + N_k\vec{e}_y)$ tại điểm tiếp xúc đất-bánh xe (với k = 1, 2, 3 và 4).

2 Hình trụ kéo hình lập phương

Hệ quy chiếu Trái Đất xem như là hệ quy chiếu Galilê. Ta xét một hệ gồm hình lập phương khối lượng M và một hình trụ đồng nhất khối lượng m, tâm C bán kính R và momen quán tính $J = \frac{1}{2}mR^2$ đối với trục hình trụ. Một sợi dây không bị kéo dãn, khối lượng không đáng kể, một đầu móc vào hình lập phương M, một đầu quấn trên hình trụ.

Hình lập phương trượt không ma sát trên mặt nghiêng.



Ròng rọc có khối lượng không đáng kể, quay không ma sát quanh trục.

Hệ được thả tự do, không có vận tốc ban đầu, dây không bị chùng mà cũng không bị căng, phần dây bên hình trụ là thẳng đứng, phần dây buộc vào hình lập phương song song với mặt nghiêng.

1) Chứng minh rằng chuyển động của quán tâm C của hình trụ là thẳng đứng.

2) Xác định gia tốc a_M của hình lập phương và a_m của tâm C hình trụ. Biện luận theo các giá trị của α.

3 Giọt nước rơi

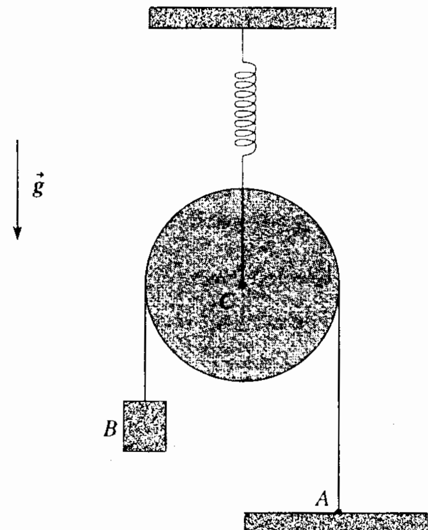
Trong quá trình rơi thẳng đứng, một giọt nước hình cầu đi qua một đám mây đứng yên, ở đấy không khí bão hòa hơi nước; hơi nước ngưng tụ lên giọt nước làm tăng cả thể tích và khối lượng.

Cho rằng khối lượng tăng lên trong một đơn vị thời gian $\frac{dm}{dt}$ tỉ lệ với diện tích mặt ngoài của giọt nước (hằng số tỉ lệ này bằng k), xác định vận tốc v của giọt nước phụ thuộc theo thời gian. Ta giả thiết rằng độ lớn g của trọng trường là đồng đều. Kí hiệu ρ là khối lượng của một đơn vị thể tích nước và r_0 là bán kính ban đầu của giọt nước lúc vận tốc bằng không.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

4 Dao động của vật treo

Hệ quy chiếu được xem là hệ quy chiếu Galilê. Xét hệ như vẽ ở sơ đồ dưới đây:



Trục của ròng rọc treo trên một lò xo có hệ số đàn hồi k; (tâm C, khối lượng M và momen quán tính $J = \frac{1}{2} M R^2$ so với trục).

Dây không bị dãn, khối lượng dây và độ đàn hồi không đáng kể, dây buộc cố định ở A; quấn lên ròng rọc (không bị trượt) và ở đầu B có vật treo khối lượng m.

Tính chu kỳ dao động theo chiều thẳng đứng của vật treo.

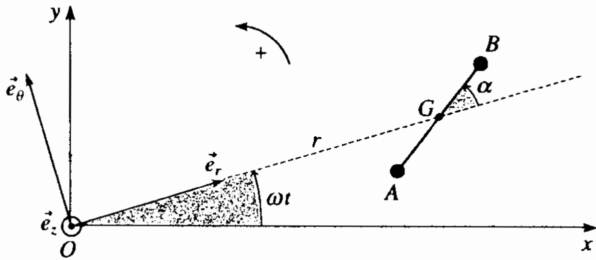
5 Dao động trên quỹ đạo của vệ tinh Trái Đất

Trái Đất có tâm là O tác dụng lên mọi chất điểm khối lượng m một lực hấp dẫn là:

$$\vec{F} = -Km\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}, \text{ với } K = 4.10^{-14}\,\text{m.s}^{-2}.$$

Trong hệ quy chiếu địa tâm (O ;x, y, z) mà ta giả thiết là Galilé, ta xét một vệ tinh mà quán tâm G vạch nên một quỹ đạo tròn tâm O bán kính r quanh Trái Đất, với tốc độ góc ω không thay đổi, trong mặt phẳng (Oxy).

Vệ tinh gồm hai khối điểm giống nhau A và B nối với nhau bằng một thanh cứng khối lượng không đáng kể ($AB = 2b$). Ta quan tâm đến sự quay của AB quanh G trong mặt (Oxy), xác định bởi góc $\alpha = (\vec{e}_r, \overrightarrow{GB})$.



1) Đối với những giá trị α nào thì momen đối với điểm G của các lực trọng trường thực hiện lên vệ tinh bằng không?

2) Thực hiện phép khai triển có giới hạn theo $\frac{b}{r}$, chứng minh rằng số hạng chính của momen là:

$$\vec{\mathcal{M}}_G = -\frac{3Km}{b}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \sin 2\alpha\, \vec{e}_z.$$

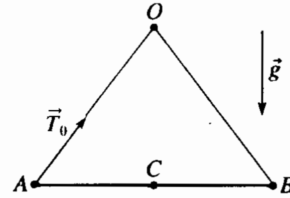
3) Tính chu kì của những dao động nhỏ của vệ tinh quanh vị trí cân bằng bền.

Cho biết: $r = 7000$km, $b = 5$m và $m = 4$kg.

6 Tính lực căng

Một thanh AB đồng nhất, tâm C khối lượng m, chiều dài b, có momen quán tính đối với trục đi qua C và vuông góc với thanh là $J = \frac{1}{12}mb^2$. Thanh treo tại điểm O bằng hai dây không dãn và khối lượng dây không đáng kể, như ở hình vẽ.

Hệ quy chiếu Trái Đất được xem là Galilé: thanh AB nằm ngang và hai dây OA, OB có cùng chiều dài là b.



1) Toàn bộ đứng yên. Tính giá trị T_0 của lực căng T_0 của dây OA ở A.

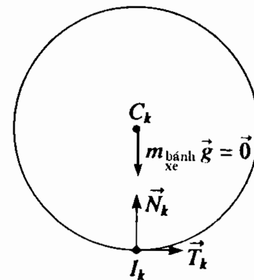
2) Người ta cắt dây OB ; tính giá trị mới của độ lớn $\vec{T}$ của lực căng $\vec{T}$ ở A của dây OA lúc mà người ta vừa mới cắt dây OB, khi mà thanh AB còn chưa chuyển dịch. Tính tỉ số $\frac{T}{T_0}$.

BÀI GIẢI

1 *Xe tải chịu tác dụng của trọng lượng $M\vec{g}$ và lực ở các chỗ tiếp xúc với đất $T_k\vec{e}_x + N_k\vec{e}_y$ ($k = 1, 2, 3$ và 4) đó là những ngoại lực duy nhất.*

Áp dụng cho mỗi bánh xe định lí về momen động lượng đối với tâm C_k của nó trong hệ quy chiếu trọng tâm và chiếu lên trục (Oz), ta nhận xét rằng T_k phải bằng không vì ta bỏ qua khối lượng bánh xe như vậy là bỏ qua momen quán tính; hơn nữa không có ma sát nào ở trục quay:

$$0 = J\dot{\omega} = (\overrightarrow{C_k I_k} \wedge T_k\vec{e}_x).\vec{e}_z.$$

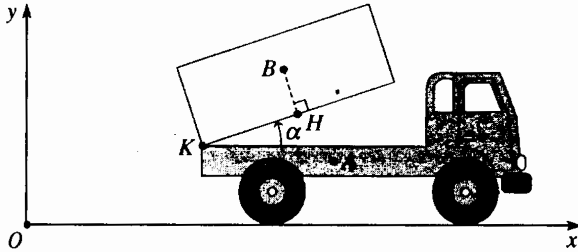


Sau nữa, những ngoại lực duy nhất tác dụng lên xe tải là thẳng đứng và như vậy quán tâm G của xe tải không bị dịch chuyển nằm ngang khi thùng xe chuyển động.

Kí hiệu A và B là khối tâm của xe và thùng xe. G được xác định bởi:

$$M\overrightarrow{OG}=(M-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}\text{, vậy}$$

$$M\overrightarrow{OG}=M\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{HB}).$$



Chiếu xuống trục nằm ngang ta có:

$$Mx_A+m(a\cos\alpha-b\sin\alpha)=\text{cte}.$$

(vì vectơ $\overrightarrow{AK}$ là không đổi)

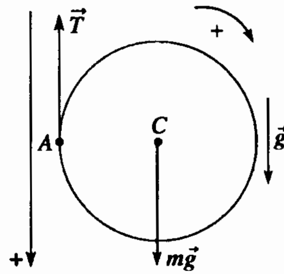
Từ đó ta cũng rút ra dịch chuyển d của xe tải (nghĩa là dịch chuyển d của điểm A) khi thùng xe lật nghiêng là:

$$Mx_{A_0}+ma=m(x_{A_0}+d)+m(a\cos\alpha_0-b\sin\alpha_0).$$

từ đấy $d=\dfrac{m}{M}(a(1-\cos\alpha_0)+b\sin\alpha_0)$.

2 1) *áp dụng cho hình trụ định lí tổng hợp động lực:*

$$m\vec{a}_m=\vec{T}+m\vec{g}$$



Đầu tiên các lực đều thẳng đứng như vậy gia tốc $\vec{a}_m$ của tâm C của hình trụ cũng thẳng đứng. Tiếp sau, lực căng $\vec{T}$ của dây vẫn thẳng đứng và điểm C vạch nên một quỹ đạo thẳng đứng.

2) *Chiếu hệ thức trên lên trục thẳng đứng chiều từ trên xuống:*

$$ma_m=-T+mg\quad(T>0)$$

Định lí momen động lượng đối với trục áp dụng cho hình trụ trong hệ quy chiếu trọng tâm cho kết quả:

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}=RT.$$

Áp dụng định lí tổng hợp động lực cho hình lập phương, chiếu lên trục song song với mặt nằm nghiêng, ta có:

$$Ma_M=T-Mg\sin\alpha$$

Chú ý rằng lực căng $\vec{T}$ của dây có cùng độ lớn ở hai đầu vì ta giả thiết rằng ròng rọc không có khối lượng và quay không ma sát.

Ta chỉ còn cần viết hệ thức động học liên hệ các vận tốc $\vec{v}_m$ của tâm C hình trụ, $\vec{v}_M$ của lập phương và vận tốc góc $\dot{\theta}$ của hình trụ; A và C là hai điểm của hình trụ, ta có thể viết:

$$\vec{v}(A)=\vec{v}(C)+\vec{\dot{\theta}}\wedge\overrightarrow{CA},$$

từ đó viết các giá trị đại số, chú ý quy tắc về dấu ở sơ đồ trên:

$$v(A)=v_m-R\dot{\theta},$$

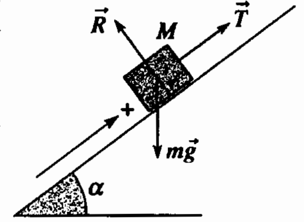
Vì rằng dây không dãn, không trượt trên hình trụ, các tốc độ $\vec{v}_M$ của lập phương và $\vec{v}(A)$ của điểm A của hình trụ phải cùng một giá trị đại số:

$$v_M=v(A)=v_m-R\dot{\theta},$$

hay lấy đạo hàm ta được: $a_M=a_m-R\ddot{\theta}$.

Khử T và $\ddot{\theta}$ trong các phương trình, ta có:

$$a_m=g\frac{m-3M\sin\alpha}{m+3M}\text{ và }a_m=g\frac{m+M(2-\sin\alpha)}{m+3M}$$



Vậy ta có nhận xét là a_m luôn luôn dương: hình trụ luôn có chuyển động từ trên xuống dưới và a_M là:

- *dương nếu m > 3Msinα: hình lập phương chạy xiên lên theo mặt phẳng nghiêng ;*
- *âm nếu m < 3Msinα: hình lập phương chạy xiên xuống mặt phẳng nghiêng ;*
- *bằng không khi m = 3Msinα: hình lập phương đứng yên.*

3 *Dùng hệ quy chiếu trái đất, xem như là hệ quy chiếu galilê vận dụng định lí về động lượng ứng với hai thời điểm gần nhau t và t + dt đối với hệ kín gồm giọt nước ở thời điểm t và khối lượng dm nước ngưng tụ lên giọt nước giữa hai thời điểm gần nhau, chiếu theo trục thẳng đứng từ trên xuống, ta có phương trình dạng:*

$$P_z(t+\mathrm{d}t)-P_z(t)=F_{z,\text{ext}}\mathrm{d}t\text{ với }P_z(t)=m(t)v(t)+dm.0=mv$$

vì ở thời điểm t, khối lượng dm của nước trong đám mây giả thiết là đứng yên.

$$P_z(t+\mathrm{d}t)=m(t+\mathrm{d}t)v(t+\mathrm{d}t)=(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)\text{ và}$$

$$F_{z,\text{ext}}=(m+dm)g$$

Bỏ qua các số hạng bậc hai, từ đó ta suy ra:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=mg,$$

ta còn có thể viết dưới dạng:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=mg,$$

$\vec{g}$ z $\vec{v}$

Nhưng $m=\rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$ *và* $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=k4\pi r^2$, *từ đây ta có:* $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{k}{\rho}=\text{cte}$.

Vậy ta có thể viết phương trình chuyển động dưới dạng:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^3v)=\frac{k}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^3v)=r^3g$$

lấy tích phân, tính đến các điều kiện ban đầu, ta được:

$$\frac{k}{\rho}r^3v=\frac{g}{4}(r^4-r_0^4)$$

Từ đó ta được:

$$v=\frac{\rho g}{4k}\left(r-\frac{r_0^4}{r^3}\right)\text{, với }r=\frac{k}{\rho}t+r_0.$$

Ta có thể nhận xét rằng sau một thời gian khá lâu, gia tốc của giọt nước tiến đến không đổi và bằng $\dfrac{g}{4}$.

Chú ý

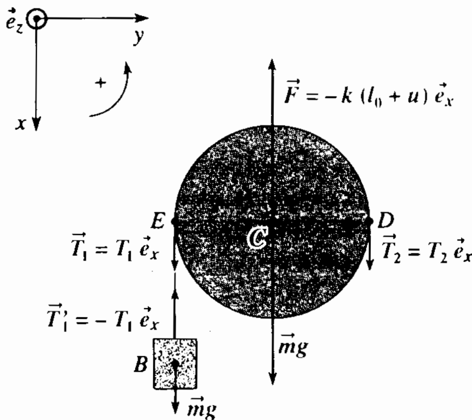
Áp dụng trực tiếp hệ thức cơ bản của động lực học:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = mg ,$$

ta sẽ tìm được cùng một kết quả.

Mặc dầu thế, chúng tôi khuyên là rất không nên dùng cách này vì cái vẻ bề ngoài là dễ dàng vận dụng che đậy tất cả cái khó khăn về lập luận. Để thấy rõ điều này, chỉ cần đặt ra bài toán với giả thiết là mây cũng chuyển động xuống dưới với vận tốc v_0 không đổi.

4 *Ta kí hiệu x là độ dịch chuyển thẳng đứng của vật nặng và u là dịch chuyển thẳng đứng của tâm C của ròng rọc đối với các vị trí cân bằng tương ứng của chúng.*



Dùng những kí hiệu ở sơ đồ, ta viết:

- *Đối với vật nặng, định lí về tổng hợp động lực chiếu lên trục thẳng đứng (Ox) :* $m\ddot{x} = mg - T_1$;
- *Đối với ròng rọc:*

- định lý tổng hợp động lực chiếu lên (Ox):

$$M\ddot{u} = M\,g + T_1 + T_2 - k(l_0 + u) ;$$

- định lí momen động lượng đối với trục trong hệ quy chiếu trọng tâm: kí hiệu $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ là vận tốc quay của ròng rọc, ta có:

$$\frac{1}{2}M\,R^2\,\dot{\omega} = (T_1 - T_2)R .$$

Cuối cùng ta có các hệ thức động học:

$\vec{v}(D) = \vec{v}(A) = \vec{0}$ *(dây không dãn)*

$\vec{v}(E) = \vec{v}(B) = \dot{x}\vec{e}_x$

$\vec{v}(E) = \vec{v}(D) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DE} = 2\omega R$ *(dây không trượt trên ròng rọc)*

$\vec{v}(C) = \vec{v}(D) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DC} = \omega R$;

Từ đó $\dot{x} = 2\dot{u} = 2\omega R$ *và* $x = 2u$.

Tổ hợp những các phương trình có được và chỉ giữ lại biến x, ta có:

$$\left(\frac{3}{4}M + 2m\right)\ddot{x} = Mg + 2mg - kl_0 - \frac{k}{2}x .$$

Khi cân bằng, ta dễ dàng nghiệm ra rằng:

$$Mg + 2mg - kl_0 = 0 \text{, từ đó } 2\left(\frac{3}{4}M + 2m\right)\ddot{x} + kx = 0 .$$

Vật nặng (và ròng rọc) thực hiện những dao động hình sin với tần số góc được xác định bởi:

$$\Omega^2 = \frac{2k}{3M + 4m} \text{ và chu kỳ } T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M + 4m}{2k}}$$

5 1) *Momen đối với G của các lực trọng trường là:*

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \overrightarrow{GA} \wedge \left(-Km\frac{\overrightarrow{OA}}{OA^3}\right) + \overrightarrow{GB} \wedge \left(-Km\frac{\overrightarrow{OB}}{OB^3}\right)$$

Biết rằng $\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_r + \overrightarrow{GA}$ *và* $\overrightarrow{OB} = r\vec{e}_r + \overrightarrow{GB} = r\vec{e}_r - \overrightarrow{GA}$, *ta có:*

$$\vec{\mathcal{M}}_G = K\,m\,r\overrightarrow{GA} \wedge \vec{e}_r\left(\frac{1}{OB^3} - \frac{1}{OA^3}\right)$$

Momen này bằng không

- *Nếu $\overrightarrow{GA}$ là đồng tuyến với $\vec{e}_r$: $\alpha = 0$ hay π;*
- *Hay là nếu OA = OB: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ hay $3\frac{\pi}{2}$.*

2) *Biết rằng $b \ll r$:*

$$\frac{1}{OB^3} - \frac{1}{OA^3} = \overrightarrow{AB}.\text{grad}\frac{1}{r^3} = \overrightarrow{AB}.\left(-\frac{3}{r^4}\vec{e}_r\right) = -\frac{6b\cos\alpha}{r^4} ;$$

$$\overrightarrow{GA} \wedge \vec{e}_r = b\sin\alpha\vec{e}_z .$$

Ta có : $\vec{\mathcal{M}}_G = -\frac{3Km}{b}\left(\frac{b}{4}\right)^3 \sin 2\alpha\,\vec{e}_z$.

3) *Vận dụng định lí momen động lượng cho vệ tinh đối với G, trong hệ quy chiếu trọng tâm, chiếu lên trục (Oz) (không quên rằng sự quay của vệ tinh trong hệ quy chiếu trọng tâm với tâm G và các trục đồng tuyến với (Ox), (Oy) và (Oz) là xác định bởi vận tốc $(\dot{\alpha} + \omega)$), ta có:*

$$2mb^2\frac{d}{dt}(\dot{\alpha} + \omega) = -\frac{3Km}{b}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \sin 2\alpha ,$$

vì ω = cte nên có thể viết thành: $2mb^2\ddot{\alpha} = -\frac{3Km}{b}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \sin 2\alpha$.

Kí hiệu α_0 là một vị trí cân bằng của vệ tinh, ở đấy momen $\vec{\mathcal{M}}_G$ bằng không ($\alpha_0 = 0$, π, $\frac{\pi}{2}$ hay $3\frac{\pi}{2}$), ta đặt $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ với ε rất nhỏ.

Phương trình trên trở thành $\ddot{\varepsilon} = -\left(3\frac{K}{r^3}\cos 2\alpha_0\right)\varepsilon$.

Như vậy với $\alpha_0 = 0$ hay π, $\cos 2\alpha_0 = 1$ ta có được phương trình dưới dạng:

$$\ddot{\varepsilon} = -\Omega^2\varepsilon$$

mà nghiệm là hàm sin có chu kì : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{3K}}$.

Các vị trí $\alpha_0 = 0$ và $\alpha_0 = \pi$ là bền.

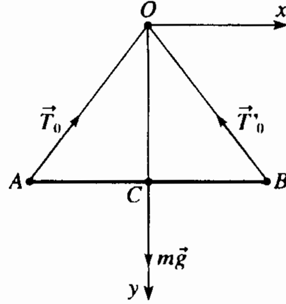
Thay số vào: $T = 56$ phút

Ngược lại các vị trí $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ hay $3\frac{\pi}{2}$ $(\cos 2\alpha_0 = -1)$ là không bền.

6 **1)** *Khi cân bằng lực tổng hợp tác dụng lên thanh AB là bằng không và các lực căng $\vec{T}_0$ và $\vec{T}'_0$ của hai dây rõ ràng là có cùng giá trị T_0 vì đối xứng; từ đó khi chiếu lên (Oy) ta có:*

$$0 = -2T_0 \cos\frac{\pi}{6} + mg$$

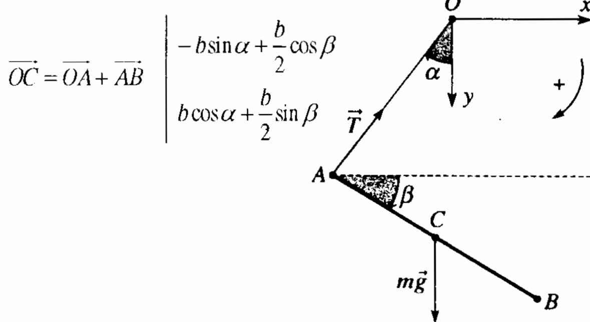
và $T_0 = \frac{mg}{\sqrt{3}}$.



2) *Chúng ta đã vẽ ở sơ đồ dưới dây vị trí của hệ ở thời điểm t, sau khi đã cắt dây OB và giả sử rằng dây OA còn đang thẳng (dây ở thời điểm $t = 0^+$ vì nó không bị động dậy)*

Xác định các tọa độ của khối tâm C của thanh:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad \begin{vmatrix} -b\sin\alpha + \frac{b}{2}\cos\beta \\ b\cos\alpha + \frac{b}{2}\sin\beta \end{vmatrix}$$



Áp dụng cho thanh AB:

- *định lí tổng hợp động lực, chiếu lên trục (Ox) và (Oy):*

$$\begin{vmatrix} mb\left(\dot{\alpha}^2\sin\alpha - \ddot{\alpha}\cos\alpha - \frac{\ddot{\beta}}{2}\sin\beta - \frac{\dot{\beta}^2}{2}\cos\beta\right) = T\sin\alpha \\ mb\left(-\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \ddot{\alpha}\sin\alpha + \frac{\ddot{\beta}}{2}\cos\beta - \frac{\dot{\beta}^2}{2}\sin\beta\right) = -T\cos\alpha + mg \end{vmatrix}$$

- *định lí momen động lượng đối với C trong hệ quy chiếu trọng tâm của nó, chiếu lên trục (Oz):*

$$J\ddot{\beta} = \frac{1}{12}mb^2\ddot{\beta} = (\overrightarrow{CA} \wedge \vec{T}).\vec{e}_z = \frac{b}{2}T\cos(\beta - \alpha).$$

Ta viết ba phương trình có được ở thời điểm ban đầu (đúng lúc vừa cắt dây OB)

$$\alpha = \frac{\pi}{6};\ \beta_0 = 0;\ \dot{\alpha}_0 = 0;\ \dot{\beta}_0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -mb\ddot{\alpha}_0\cos\frac{\pi}{6} = T\sin\frac{\pi}{6} \\ -mb\left(\ddot{\alpha}_0\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\ddot{\beta}_0}{2}\right) = -T\cos\frac{\pi}{6} + mg \\ \frac{1}{6}mb\ddot{\beta}_0 = T\cos\frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$$

Khử $\ddot{\alpha}_0$ và $\ddot{\beta}_0$ ta tìm được:

$$T = \frac{2\sqrt{3}}{13}mg \text{ và } \frac{T}{T_0} = \frac{6}{13}.$$

4 NGHIÊN CỨU NĂNG LƯỢNG CÁC HỆ CHẤT

MỤC TIÊU

■ Mở rộng định lí về động năng cho trường hợp hệ chất.

■ Cơ năng của hệ chất.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

■ Định luật động lực học các hệ chất.

■ Công và công suất của lực.

■ Định lí động năng của chất điểm.

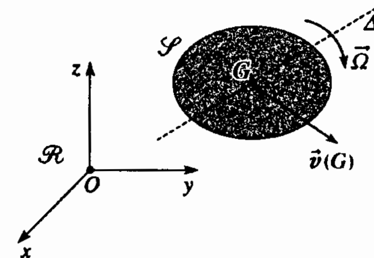
Mở đầu

Các khái niệm về công, công suất, năng lượng là cơ bản trong cơ học. Trong quá trình chuyển động của hệ chất, năng lượng của hệ có thể thể hiện dưới dạng động năng hoặc thế năng và có thể chuyển từ dạng này sang dạng khác.

Trong thác nước, thế năng của nước chuyển thành động năng và nước có thể làm cho tuabin quay nhanh.

Ở một số điều kiện nhất định hoàn toàn không có ma sát năng lượng của hệ chất có thể được bảo toàn trong quá trình chuyển động ; con lắc có thể dao động mãi mãi, thế năng của nó chuyển thành động năng trong một nửa chu kì, quá trình ngược lại được thực hiện trong nửa chu kì tiếp theo.

1 Định lí về động năng (hay về công suất động năng)



H.1. *Vật rắn $\mathcal{S}$ chuyển động trong $\mathcal{R}$.*

1.1. Trường hợp một vật rắn trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$

1.1.1. Tích (hay là đồng momen) của hai toocsơ

Xét hai toocsơ $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ có các phần tử rút gọn ở tại một điểm A tương ứng là :

- tổng hợp $\vec{R}_1$ và momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1A}$ đối với toocsơ $\mathcal{T}_1$;
- tổng hợp $\vec{R}_2$ và momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2A}$ đối với toocsơ $\mathcal{T}_2$.

Người ta định nghĩa tích của hai toocsơ $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ tại một điểm A là :

$$\mathcal{P}(A) = \vec{R}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2A} + \vec{R}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1A}.$$

Tính tích $\mathcal{P}(B)$ tại một điểm B khác, ta có thể nghiệm thấy rằng :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) + \vec{R}_1 .(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_2) + \vec{R}_2 .(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1) = \mathcal{P}(A)$$

Tích $\mathcal{P}$ của hai toocsơ không phụ thuộc điểm A mà ta nói đến.

1.1.2. Định lí về động năng một vật rắn

Động năng $\mathscr{E}_K$ của vật rắn $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu galilé $\mathcal{R}$ được cho bởi (*hình* 1) :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2} m v^2(G) + \mathscr{E}_K^*,$$

với $\mathscr{E}_K^* = \frac{1}{2} J_{G_\Delta} \Omega^2$ nếu vật rắn quay quanh trục Δ có phương xác định.

(Xác định theo vectơ đơn vị $\vec{e}_\Delta$) với vận tốc $\vec{\Omega} = \Omega(t)\vec{e}_\Delta$ trong $\mathcal{R}$.

Nhớ lại rằng tốc độ $\vec{\Omega}$ của vật rắn trong $\mathcal{R}$ hay trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$ là như nhau.

Lấy đạo hàm của động năng đó, ta có $\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = m\vec{a}(G).\vec{v}(G) + J_{G_\Delta}\frac{d\vec{\Omega}}{dt}.\vec{\Omega}$.

Như vậy trong $\mathcal{R}$ định lí về tổng hợp động lực cho $m\vec{a}(G) = \vec{F}_{ext,}$ và trong $\mathcal{R}^*$ định lí về momen động lượng đối với trục Δ (cố định trong $\mathcal{R}^*$) $\frac{\Delta L_\Delta}{\Delta t} = J_{G_\Delta} = \frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{M}_{G_{\Delta,\,ext,}}$ dẫn đến :

$$J_{G_\Delta}\frac{d\vec{\Omega}}{dt}.\vec{\Omega} = J_{G_\Delta}\frac{d\Omega}{dt}\Omega = \mathcal{M}_{G_{\Delta,\,ext}}.\Omega = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\,ext}.\vec{\Omega},$$

vì $\mathcal{M}_{G_{\Delta,\,ext}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\,ext}.\vec{e}_{\Delta,}$ từ đó ta suy ra :

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \vec{F}_{ext}.\vec{v}(G) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\,ext}.\vec{\Omega}..$$

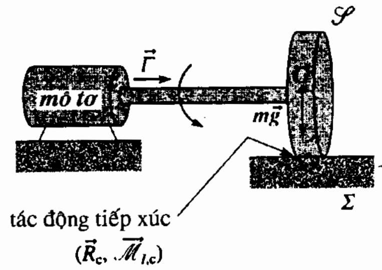
Vế thứ hai, đồng nhất với công suất, đó là công suất của những tác động cơ học bên ngoài tác dụng lên vật rắn $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$, vậy :

$$\mathscr{P}_{ext} = \vec{F}_{ext}.\vec{v}(G) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{G,\,ext}.\vec{\Omega}.$$

Ta nhận thấy rằng công suất đó là bằng tích của toocsơ các tác động cơ bên ngoài với toocsơ các vận tốc vật rắn.

Ta sẽ thấy rằng tích này không phụ thuộc vào điểm mà ta tính toán.

Ta giải thích rõ hơn công suất này qua thí dụ về vật rắn $\mathcal{S}$ chịu các tác động ngoài như sau (*H*.2) :



H.2. *Tác động cơ bên ngoài lên vật rắn $\mathcal{S}$.*

• trọng lượng $m\vec{g}$ của nó, đó là một lực đi qua G, nghĩa là một glitsơ xác định bởi tổng hợp $m\vec{g}$ và momen của nó ở G, $\vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ trọng lượng}} = \vec{0}$;

• một ngẫu lực có momen $\vec{\Gamma}$ do một động cơ thực hiện (giả thiết rằng tổng hợp tác động cơ của môtơ là bằng không);

• các tác động cơ tiếp xúc thực hiện bởi một "đế" cứng Σ và xác định bởi tổng hợp $\vec{R}_c$ và momen $\vec{\mathcal{M}}_{I,c}$ ở I.

Vậy ta có : $\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{g} + \vec{R}_c$; $\vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ ext}} = \vec{\mathcal{M}}_{G,\text{ trọng lượng}} + \vec{\Gamma} + \vec{\mathcal{M}}_{G,c}$

với $\mathcal{M}_{G,\text{ trọng lượng}} = \vec{0}$ và $\vec{\mathcal{M}}_{G,c} = \vec{GI} \wedge \vec{R}_c + \vec{\mathcal{M}}_{I,c}$, từ đó có thể viết công suất ngoại $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ là :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = m\vec{g}.\vec{v}(G) + \vec{\Gamma}.\vec{\Omega} + \left(\vec{R}_c.\vec{v}(I) + \vec{\mathcal{M}}_{I,c}.\vec{\Omega}\right)$$

với $\vec{v}(I)$ là vận tốc của điểm I thuộc vật rắn.

Vậy ta có thể diễn đạt công suất của những tác động cơ từ bên ngoài theo cách xét riêng rẽ công suất của từng tác động cơ :

• đối với lực $\vec{F}$ tác dụng tại một điểm B(nghĩa là một glitsơ), thí dụ trọng lượng : $\vec{F}.\vec{v}(B)$;

• đối với ngẫu lực momen $\vec{\Gamma}$: $\vec{\Gamma}.\vec{\Omega}$;

• đối với một toocsơ tác động cơ mà ta biết các phần tử rút gọn tại một điểm A, ví dụ $\left(\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_A\right)$: $\vec{R}.\vec{v}(A) + \vec{\mathcal{M}}_A.\vec{\Omega}$ với $\vec{v}(A)$ là vận tốc của điểm A thuộc về vật rắn.

Chúng ta thừa nhận những kết quả ta vừa chứng minh đối với vật rắn quay quanh trục có hướng xác định là đúng cho chuyển động bất kì nào của vật rắn ; vậy chúng ta có thể phát biểu định lí về công suất động năng đối với một vật rắn.

Đối với một vật rắn chuyển động trong hệ quy chiếu galilé, đạo hàm của động năng bằng công suất của các tác động cơ từ bên ngoài tác động lên vật rắn :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_K}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}} \text{ đối với vật rắn trong } \mathcal{R} \text{ galilé.}$$

Ta nhận xét rằng các tác động cơ nội (các lực liên kết giữa các bộ phận khác nhau của vật rắn) không có mặt trong định lí về công suất động năng đối với một vật rắn :

$$\mathcal{E}_K(t_2) - \mathcal{E}_K(t_1) = W_{\text{ext}}(t_1, t_2)$$

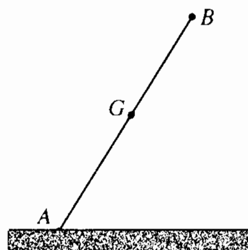
ở đây $W_{\text{ext}}(t_1, t_2)$ là công của các tác động cơ ngoại giữa các thời điểm t_1 và t_2 :

$$W_{\text{ext}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\text{ext}} \mathrm{d}t .$$

Áp dụng 1

Thanh đổ xuống đất

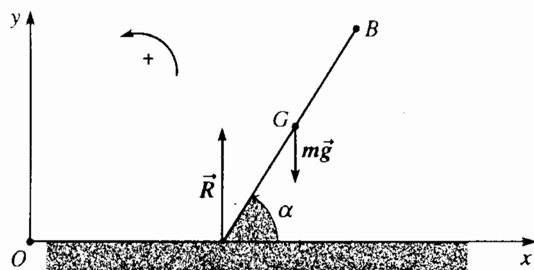
Một thanh AB đồng nhất có tâm G chiều dài 2b, đặt thẳng đứng trên mặt đất không có vận tốc ban đầu gì cả. Nhẹ nhàng làm mất thăng bằng, thanh bị đổ xuống (H.3). Giả thiết rằng đầu mút A trượt không ma sát trên mặt đất, tính tốc độ v_0 của tâm G của thanh khi thanh chạm mặt đất. Nhớ lại rằng momen quán tính của thanh đối với đường trung trực là



H.3. *Thanh đổ xuống đất.*

$$J = \frac{1}{3}mb^2$$

Dùng các kí hiệu như ở *hình* 4, vận dụng định lí về động năng đối với thanh ở thời điểm ban đầu



H.4. *Các lực tác dụng lên thanh.*

(thanh đứng yên và $\alpha = \frac{\pi}{2}$) và ở thời điểm t :

$$\frac{1}{2}mv(G)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 - O = mg(b - b\sin\alpha)$$

vì chỉ có trọng lượng là có tác dụng trong quá trình chuyển động.

Ta kí hiệu x là tọa độ điểm A ; tốc độ của tâm G lúc đó có các thành phần là :

$$\vec{v}(G)\left|\begin{array}{l} \dot{x} - b\dot{\alpha}\sin\alpha \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{array}\right.$$

Vì không có ma sát, tất cả các lực (trọng lượng $m\vec{g}$ và phản lực $\vec{R}$) là thẳng đứng ; chiếu lên (Ox), từ định lí tổng hợp động lực ta có (để ý đến các điều kiện đầu):

$\vec{v}(G).\vec{e}_x = \text{cte} = \vec{0}$, từ đó $\dot{x} = b\dot{\alpha}\sin\alpha$;

vậy : $\vec{v}(G) = b\cos\alpha\,\dot{\alpha}\,\vec{e}_y$

và $\vec{v}(G)^2 = b^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha$.

Khi $\dot{\alpha}^2$ trong biểu thức của định lí về động năng ta có :

$$v(G)^2\left[1 + \frac{1}{3\cos^2\alpha}\right] = 2gb(1 - \sin\alpha)$$

từ đó, đối với $\alpha = 0$: $v_0^2 = v(G)^2 = \frac{3}{2}gb$.

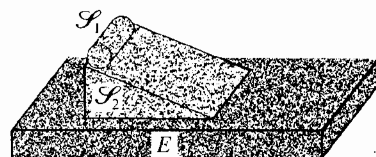
1.2. Trường hợp một tập hợp vật rắn trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$

Chúng ta giới hạn phần trình bày cho tập hợp $\mathcal{S}$ của hai vật rắn $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$. Gọi E là môi trường bên ngoài của $\mathcal{S}$ (H.5).

Vận dụng định lí công suất động năng đối với từng vật rắn $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$:

■ Đối với $\mathcal{S}_1$, $\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}_{ext,1}$ vậy ta có thể phân biệt các tác động cơ ngoại tác động lên $\mathcal{S}_1$:

• những tác động mà $\mathcal{S}_2$ thực hiện, đó là các tác động tiếp xúc giữa $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ và như vậy thì công suất là $\mathscr{P}_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1}$;



H.5. *Tập hợp $\mathcal{S}$ của hình trụ $\mathcal{S}_1$ và hình nêm $\mathcal{S}_2$.*

Những tác động mà môi trường ngoài $\mathcal{S}$ tác động và như vậy công suất là $\mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}_1}$, từ đó :

$$\frac{d\mathcal{E}_{K_1}}{dt} = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1} + \mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}_1}$$

■ Cũng vậy, đối với $\mathcal{S}_2$, ta có $\frac{d\mathcal{E}_{K2}}{dt} = \mathcal{P}_{ext,\,2} = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} + \mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}2}$.

Lấy tổng hai biểu thức có được, ta có định lí về công suất động năng đối với hệ $\mathcal{S}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = (\mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}_1} + \mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}_2}) + (\mathcal{P}_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1} + \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2})$$

Ở vế thứ nhất, $\mathcal{E}_K$ là động năng của hệ $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_{K_1} + \mathcal{E}_{K_2}$$

Ở vế thứ hai :

- Hai số hạng đầu kí hiệu đối với hệ $\mathcal{S}$ công suất của các tác động cơ ngoại : $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}_1} + \mathcal{P}_{E \to \mathcal{S}_2}$;
- Hai số hạng sau tạo thành công suất của các tương tác giữa $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$, đối với $\mathcal{S}$ là các tác động cơ nội :

$$\mathcal{P}_{int,\,\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}_2} = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1} + \mathcal{P}_{\mathcal{S}_1 \leftrightarrow \mathcal{S}_2},$$

từ đó $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int,\,\mathcal{S}_2 \leftrightarrow \mathcal{S}_1}$.

Trong trường hợp $\mathcal{S}$ bao gồm nhiều hơn hai vật rắn, có thể tổng quát kết quả trên một cách dễ dàng :

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \sum_{i,j} \mathcal{P}_{int,\,\mathcal{S}_i \leftrightarrow \mathcal{S}_j}$$

Và lấy tích phân giữa hai thời điểm t_1 và t_2, ta có :

$$\mathcal{E}_K(t_2) - \mathcal{E}_K(t_1) = W_{ext} + \sum_{i,j} W_{int,\,\mathcal{S}_i \leftrightarrow \mathcal{S}_j}$$

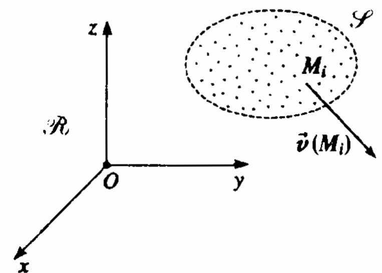
Mặc dầu định lí tác động và phản tác động cho thấy tổng của các tác động cơ giữa các vật rắn khác nhau $\mathcal{S}_i$ và $\mathcal{S}_j$ là bằng không, không có một lí do nào để cho công suất của những tác động cơ nội đối với $\mathcal{S}$ là bằng không, mà điều tiên nghiệm là không bằng không.

1.3. Trường hợp một hệ kín bất kì trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$

Đối với một hệ $\mathcal{S}$ gồm các chất điểm (*h*.6) ta có thể vận dụng tại mỗi điểm M_i định lí về động năng, cần cẩn thận phân biệt :

- các lực $\vec{f}_{i,\,ext}$ mà môi trường ngoài tác dụng lên M_i ;
- các lực $\vec{f}_{i.\,int}$ mà những điểm khác của $\mathcal{S}$ tác dụng lên M_i.

Ta có $\frac{d\mathcal{E}_{K_i}}{dt} = \vec{f}_{i,\,ext}.\vec{v}(M_i) + \vec{f}_{i,int}.\vec{v}(M_i) = \mathcal{P}_{i,\,ext} + \mathcal{P}_{i.\,int}$.



H.6. *Hệ $\mathcal{S}$ của các chất điểm.*

Lấy tổng đối với tất cả các điểm của $\mathscr{S}$, ta có :

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}_{ext} + \mathscr{P}_{int}$$

và lấy tích phân giữa hai thời điểm t_1 và t_2 :

$$\mathscr{E}_K(t_2) - \mathscr{E}_K(t_1) = W_{ext} + W_{int}$$

Định lí động năng phát biểu như sau :

Biến thiên động năng của một hệ kín $\mathscr{S}$ trong một hệ quy chiếu galilé $\mathscr{R}$, giữa hai thời điểm là bằng công của *tất cả các tác động cơ ngoại và nội*, tác dụng lên hệ $\mathscr{S}$ giữa hai thời điểm đó.

Ta thừa nhận rằng định lí này là tổng quát đối với hệ kín $\mathscr{S}$ bất kì.

Cần nhấn mạnh điều là nếu hệ $\mathscr{S}$ là biến dạng được, công của các tác động cơ nội, một cách tiên nghiệm, là khác không.

Chú ý :

Định lí động năng có thể viết được trong hệ quy chiếu galilé :

$$\mathscr{E}_K(t_2) - \mathscr{E}_K(t_1) = W_{ext} + W_{int},$$

hay dưới dạng vi phân giữa hai thời điểm gần nhau :

$$d\mathscr{E}_K = \delta W_{ext} + \delta W_{int},$$

hay dưới dạng đạo hàm : $\dfrac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}_{ext} + \mathscr{P}_{int}$.

Ở dạng cuối cùng này, người ta còn gọi tên là *định lí về công suất động năng.*

1.4. Công suất của các tác động cơ nội

Công suất của hệ liên quan đến tốc độ của các phần tử của hệ và do đó biểu thức của công suất phụ thuộc vào hệ quy chiếu mà trong đó ta tính công suất.

Ta hãy so sánh các công suất $\mathscr{P}_{int}$ và $\mathscr{P}'_{int}$ của các tác động cơ nội lên một hệ $\mathscr{S}$ trong hai hệ quy chiếu $\mathscr{R}$ và $\mathscr{R}'$ nào đó mà theo hai hệ này ta nghiên cứu chuyển động của $\mathscr{S}$.

Để tính toán, ta xét hệ $\mathscr{S}$ gồm có các chất điểm M_i (*h*.7) như ở §**1.3**.

Trong $\mathscr{R}$: $\mathscr{P}_{int} = \sum_i \vec{f}_{i.int}.\vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}}$;

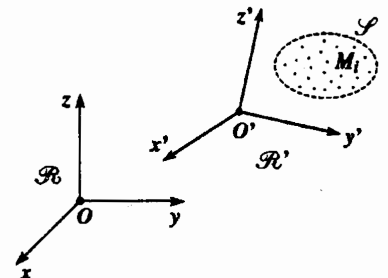
trong $\mathscr{R}'$: $\mathscr{P}'_{int} = \sum_i \vec{f}_{i.int}.\vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}'}$.

Từ định luật tổng hợp vận tốc ta suy ra :

$$\vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}} = \vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}'} + \vec{v}_e(M_i) = \vec{v}(M_i)_{/\mathscr{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathscr{R}} + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} \wedge \overrightarrow{O'M_i},$$

từ đó ta có :

$$\mathscr{P}_{int} = \mathscr{P}'_{int} + \left(\sum_i \vec{f}_{i.int}\right).\vec{v}(O')_{/\mathscr{R}} + \left(\sum_i \overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{f}_{i.int}\right).\vec{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}}.$$



H.7. *Hệ $\mathscr{S}$ chuyển động trong $\mathscr{R}$ và $\mathscr{R}'$.*

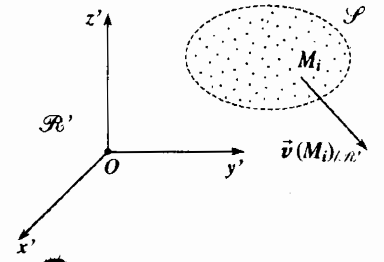
Từ định luật tác động và phản tác động ta có :

$$\vec{F}_{int} = \sum_i \vec{f}_{i.int} = \vec{0} \text{ và } \vec{\mathcal{M}}_{O',int} = \sum_i \overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{f}_{i.int} = \vec{0}\text{, từ đó } \mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}'_{int}$$

Công suất, và do đó công, của các tác động cơ nội lên một hệ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu theo đó ta tính toán :

$$\mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}'_{int}.$$

Ta thừa nhận kết quả này là tổng quát đối với bất kì hệ chất nào.



H.8. *Hệ $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu không Galilé.*

1.5. Trường hợp hệ kín bất kì trong hệ quy chiếu không Galilé $\mathcal{R}$ '

Chúng ta nghiên cứu chuyển động của hệ $\mathcal{S}$ của các chất điểm M_i trong hệ quy chiếu không Galilé $\mathcal{R}$ ' (*h*.8).

Lấy đạo hàm trong $\mathcal{R}'$ động năng $\mathcal{E}'_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i (M_i)^2_{/\mathcal{R}'}$ của hệ $\mathcal{S}$, áp dụng định lí tổng hợp động lực cho từng điểm M_i trong $\mathcal{R}$ ', ta có :

$$\frac{d\mathcal{E}'_K}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}'} . \vec{a}(M_i)_{/\mathcal{R}}$$

$$= \sum_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}'} . (\vec{f}_{i,\,ext} + \vec{f}_{i,\,int} + \vec{f}_{ie}(M_i) + \vec{f}_{iC}(M_i)),$$

ta có thể nhận xét rằng công suất của lực quán tính CORIOLIS luôn luôn bằng không vì:

$$\vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}'} . \vec{f}_{ic}(M_i) = \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}'} . \left(-2m_i \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}'}\right) = \vec{0}.$$

Và kí hiệu: $\mathcal{P}'_{f_{ie}} = \sum_i \vec{v}(M_i)_{/\mathcal{R}} . \vec{f}_{ie}(M_i)$ là công suất của các lực quán tính kéo theo trong $\mathcal{R}$ ', ta có : $\frac{d\mathcal{E}'_K}{dt} = \mathcal{P}'_{ext} + \mathcal{P}'_{int} + \mathcal{P}'_{f_{ie}}$

Trong hệ quy chiếu không Galilé $\mathcal{R}$ ' đối với biểu thức của định lí về động năng (hay là biểu thức của công suất đối với định lí về công suất động năng) ta phải thêm công của các lực quán tính kéo theo :

$$\frac{d\mathcal{E}'_K}{dt} = \mathcal{P}'_{ext} + \mathcal{P}'_{int} + \mathcal{P}'_{f_{ie}}$$

Ở đây ta cũng thừa nhận là kết quả có được trong trường hợp đặc biệt của hệ $\mathcal{S}$ gồm các chất điểm vẫn có giá trị đối với hệ kín $\mathcal{S}$ bất kì.

1.6. Trường hợp hệ kín bất kì trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathcal{R}^*$

Ta có thể lấy lại kết quả trước đây và tính công suất của các lực quán tính kéo theo.

Gia tốc kéo theo của mỗi điểm M_i của hệ $\mathcal{S}$ trong trường hợp này là không phụ thuộc M_i và bằng gia tốc $\vec{a}(G)$ của quán tâm của hệ $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$.

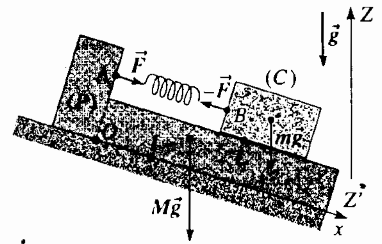
Từ đó:

$$\mathscr{P}_{f_{ie}} = \sum_i \vec{v}(M_i)^*.\vec{f}_{ie}(M_i) = \sum_i \vec{v}(M_i)^*.(-m_i\vec{a}(G)) = -\vec{a}(G).\sum_i m_i\vec{v}(M_i)^*,$$

vậy $\mathscr{P}_{f_{ie}} = 0$ vì trong $\mathscr{R}^*$ tổng động lượng $\vec{P}^* = \sum_i m_i\vec{v}(M_i)^*$ của hệ $\mathscr{S}$ là bằng không.

Trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$, một cách tiên nghiệm, không phải là Galilé, định lí về động năng (hay công suất) đươc biểu diễn như là ở hệ quy chiếu Galilé:

$$\frac{d\mathscr{E}_K^*}{dt} = \mathscr{P}_{ext}^* + \mathscr{P}_{int}^*.$$



H.9. *Hệ $\mathscr{S}$ gồm mâm (P) và hình lập phương (C) ; ở đây chỉ vẽ những lực (nội và ngoại) là dẫn suất từ thế năng.*

2 Thế năng Cơ năng của một hệ

Ta nghiên cứu chuyển động của một hệ chất kín $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu Galíle $\mathscr{R}$ (hay có khi là trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$ của hệ chất).

Tất cả các kết quả mà chúng ta sẽ thiết lập có thể tổng quát hóa cho trường hợp hệ quy chiếu không Galilé $\mathscr{R}'$ với điều kiện là thêm vào công của nội lực và ngoại lực, công của các lực quán tính kéo theo.

2.1. Thí dụ

Xét thí dụ một hệ $\mathscr{S}$ gồm có mâm (*P*) khối lượng M trượt có ma sát trên một mặt nghiêng và hình lập phương (*C*) khối lượng m có thể trượt có ma sát trên (*P*). (*P*) và (*C*) liên kết với nhau bởi lò xo có khối lượng không đáng kể, hệ số đàn hồi k và chiều dài khi không có lực tác dụng là x_0 (*H*.9).

Trên hệ $\mathscr{S}$ này có tác dụng của:

■ **Các tác động cơ ngoại**

• các trọng lượng $M\vec{g}$ và $m\vec{g}$ dẫn xuất từ một thế năng:

$$\mathscr{E}_{P_{ext}} = -mgZ_p - MgZ_C \; (+\text{cte}),$$

với Z_P và Z_C là độ cao tương ứng của các khối tâm của (*P*) và của (*C*) trên trục thẳng đứng (*ZZ'*);

• các tác động cơ tiếp xúc của mặt đất nghiêng tác dụng lên (*P*) xác định bởi tổng hợp lực $\vec{R}_{ext}$ và momen $\vec{\mathscr{M}}_{I,\,ext}$ đối với điểm *I*;

■ **Các tác động cơ nội**

• các lực $\vec{F}$ (tác dụng lên (*P*) tại A) và theo định luật tác dụng và phản tác dụng, $-\vec{F}$ (tác dụng lên (*C*) tại B) do lò xo thực hiện lên (*P*) và (*C*); thực tế chúng tạo thành 2 glítsơ. Các lực này dẫn suất từ thế năng $\mathscr{E}_{P_{int}}$ mà chúng ta đang cần xác định. Ta biết rằng công của 2 tác động cơ nội đối lập nhau không phụ thuộc vào hệ quy chiếu theo đó ta tính toán. Hãy xem ta đang ở trong hệ quy chiếu gắn với mâm (*P*); trong hệ quy chiếu này, công nguyên tố của $\vec{F}$ và $-\vec{F}$ được biểu diễn là:

$$\delta W_{1,\,int} = \vec{F}.d\vec{A}_{/P} + (-\vec{F}).d\vec{B}_{/P} = 0 - k(x - x_0)\,dx = -d\left(\frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right),$$

ở đây x là số đo đại số của véc tơ $\overline{AB}$.

Ta nhận thấy rằng công này có thể được cho dưới dạng vi phân của một hàm và ta định nghĩa thế năng $d\mathscr{E}_{P_{int}}$ bởi:

$$d\mathscr{E}_{P_{int}} = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 (+\text{cte}) \text{ sao cho } \delta W_{1,\,int} = -d\mathscr{E}_{P_{int}} ;$$

• các tác động cơ tiếp xúc giữa (*P*) và (*C*) xác định theo tổng hợp lực $\vec{R}_{int}$ và momen $\vec{\mathscr{M}}_{L,int}$ tại một điểm *L* tương ứng với tác động của (*P*) lên (*C*) và $-\vec{R}_{int}$ và $-\vec{\mathscr{M}}_{L,int}$ đối với tác động của (*C*) lên (*P*).

Rõ ràng là ta đã dùng định luật tác dụng và phản tác dụng để xác định các tác động nội này.

Áp dụng định lí động năng đối với hệ $\mathscr{S}$ trong $\mathscr{R}$ giữa hai thời điểm gần nhau : $d\mathscr{E}_K = \delta W_{int} + \delta W_{ext}$.

Trong δW_{int}, ta có thể phân biệt :

• công $\delta W_{1,\,int}$ của các lực $\vec{F}$ và $-\vec{F}$ do lò xo thực hiện, các lực này dẫn suất từ thế năng $\mathscr{E}_{P_{int}}$:

$$\delta W_{1,\,int} = -d\mathscr{E}_{P_{int}} ;$$

• công $\delta W_{2,\,int}$ của các tác động tiếp xúc $(\vec{R}_{int}, \vec{\mathscr{M}}_{L,\,int})$ của (*P*) lên (*C*) và $(-\vec{R}_{int}, -\vec{\mathscr{M}}_{L,\,int})$ của (*C*) lên (*P*), đó là công không phải dẫn suất từ thế năng, từ đó :

$$\delta W_{int} = -d\mathscr{E}_{P_{int}} + \delta W_{2,\,int} .$$

Cũng như vậy, trong δW_{ext}, ta phân biệt :

• công $\delta W_{1,\,ext}$ của các trọng lượng dẫn suất từ thế năng $\mathscr{E}_{P_{ext}}$:

$$\delta W_{1,\,ext} = -d\mathscr{E}_{P_{ext}} ;$$

• công $\delta W_{2,\,ext}$ của tác động tiếp xúc $(\vec{R}_{ext}, \vec{\mathscr{M}}_{1,\,ext})$ không phải dẫn suất từ thế năng từ đó ta có :

$$\delta W_{ext} = -d\mathscr{E}_{P_{ext}} + \delta W_{2,\,ext} .$$

Cuối cùng, định lí về động năng cho ta :

$$d(\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}}) = \delta W_{2,\,int} + \delta W_{2,\,ext} ,$$

và nếu gọi $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}}$ là cơ năng của hệ ta có $d\mathscr{E}_M = \delta W_{2;\,int} + \delta W_{2,\,ext}$.

2.2. Tổng quát

Bất kì hệ kín $\mathscr{S}$ như thế nào, trong các tác động cơ (nội và ngoại) luôn luôn ta có thể phân biệt :

Các tác động cơ dẫn suất từ thế năng $\mathscr{E}_P \left(\mathscr{E}_P = \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}}\right)$, các tác động cơ này được gọi là tác động cơ bảo toàn.

Các tác động cơ không dẫn suất từ thế năng, người ta gọi là tác động cơ không bảo toàn.

Trong mọi trường hợp cơ năng $\mathscr{E}_M$ của một hệ $\mathscr{S}$ là tổng động năng $\mathscr{E}_K$ và thế năng $\mathscr{E}_P$ (nội và ngoại) :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}}$$

và định lí động năng đối với một hệ kín $\mathscr{S}$ cho ta :

$$d\mathscr{E}_M = \delta W_{2,\,int} + \delta W_{2,\,ext} = \delta W_{NC}$$

ở đây δW_{NC} là công nguyên tố của tất cả các tác động không bảo toàn (nội và ngoại).

Ta cũng có thể viết giữa hai thời điểm t_1 và t_2 :

$\mathscr{E}_M(t_2) - \mathscr{E}_M(t_1) = W_{NC(t_1,\, t_2)}$ hay lấy đạo hàm theo thời gian và gọi $\mathscr{P}_{NC}$ là công suất của tất cả các tác động không bảo toàn :

$$\frac{d\mathscr{E}_M}{dt} = \mathscr{P}_{NC}$$

Chú ý :

Phần lớn các tác động cơ đã biết là bảo toàn : trọng lượng của một vật, lực điện, lực trọng trường, tác động của lò xo...

Trong số các tác động cơ không bảo toàn, ta có thể kể đến tác động tiếp xúc giữa các vật rắn, lực căng của sợi dây, các lực nén,...

2.3. Bảo toàn cơ năng của một hệ kín – Hệ bảo toàn

2.3.1. Định nghĩa

Nếu tất cả các tác động cơ là dẫn suất từ một thế năng hay là nếu tất cả các tác động cơ không dẫn suất từ một thế năng là không hoạt động, thì cơ năng của một hệ kín được bảo toàn trong quá trình chuyển động. Hệ kín $\mathscr{S}$ được gọi là bảo toàn.

Phương trình $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}} = \text{cte}$ là một nguyên hàm của chuyển động : đó là nguyên hàm năng lượng.

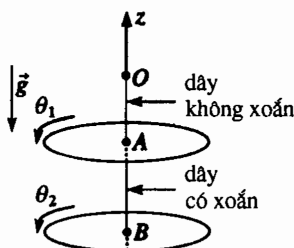
Áp dụng 2, cho thấy làm thế nào xác định được thế năng $\mathscr{E}_{P_{int}}$ xuất phát từ hai ngẫu lực nội của hệ nghiên cứu (vấn đề là hai ngẫu lực thực hiện bởi một dây xoắn).

Áp dụng 2

Sự quay của hai đĩa liên kết bởi một dây xoắn

Hệ quy chiếu trái đất được xem là hệ galilé. Hai đĩa giống nhau, đồng nhất, có tâm tương ứng là A và B, có momen quán tính J đối với trục của chúng và treo bằng hai dây tại một điểm cố định O ; Chúng có thể dao động quanh trục thẳng đứng (Oz) (h.10) : OA là dây với hằng số xoắn C.

Các vị trí của hai đĩa được xác định theo các góc θ_1 và θ_2, mà các đĩa đã quay quanh vị trí cân bằng.



H.10. *Hai đĩa nối với nhau bằng một dây xoắn.*

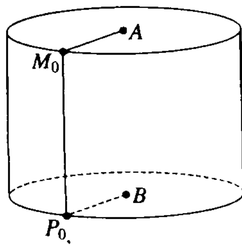
1) *Áp dụng định lí động năng cho toàn bộ hệ. Tìm thế năng $\mathscr{E}_P$ của hệ rồi tìm nguyên hàm của chuyển động.*

2) *Lấy đạo hàm phương trình ở câu hỏi 1, tương ứng theo θ_1 rồi theo θ_2, xác định hai phương trình vi phân bậc hai theo θ_1 và θ_2.*

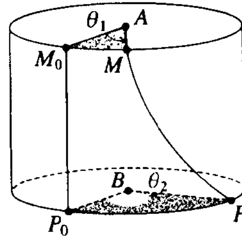
3) *Hãy tìm một cách khác để có lại được hai phương trình ở câu hỏi* **2**).

4) *Xác định θ_1 và θ_2 theo hàm của thời gian, biết rằng hai đĩa được thả ra không có tốc độ ban đầu từ các vị trí $\theta_1 = \theta_0$ và $\theta_2 = 0$.*

1) Một sợi dây xoắn thực hiện một ngẫu lực tỉ lệ với hiệu góc $(\theta_1 - \theta_2)$ mà ta quay hai đĩa A và B : ở *hình* 11, ta đã phóng đại khá lớn tiết diện của sợi dây.



H.11a. *Dây đứng yên*



H.11b. *Dây bị xoắn.*

Ở đĩa A, dây AB thực hiện ngẫu lực kéo về với momen là $-C(\theta_1 - \theta_2)$.

Ở đĩa B, dây AB thực hiện ngẫu lực kéo về với momen là $-C(\theta_2 - \theta_1)$.

Suy nghĩ một chút để không nhầm dấu của những momen này. Đừng quên rằng những ngẫu lực này là những tác động cơ nội của hệ hai đĩa và chúng phải tuân theo định luật tác dụng và phản tác dụng.

Định lí động năng vận dụng cho toàn bộ, giữa hai thời điểm gần nhau cho ta :

$$d\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2\right) = -C(\theta_1 - \theta_2)d\theta_1 - C(\theta_2 - \theta_1)d\theta_2 = \delta W_{\text{int}},$$

vì chỉ những ngẫu lực mà dây xoắn thực hiện mới cung cấp một công khác không (ở đây tương ứng với một công δW_{int} của các tác động cơ nội lên hệ).

Ta nhận xét rằng công của hai ngẫu lực bằng vi phân của một hàm và như vậy ta có thể định nghĩa một thế năng $\mathscr{E}_{P_{\text{int}}}$ bởi :

$$\delta W_{\text{int}} = -d\mathscr{E}_{P_{\text{int}}} = -d\mathscr{E}_P$$

từ đó $\mathscr{E}_P = \mathscr{E}_{P_{\text{int}}} = \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_1)^2$.

Vậy cơ năng $\mathscr{E}_M$ của hệ được bảo toàn trong quá trình chuyển động.

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}C(\theta_2 - \theta_1)^2 = \text{cte}.$$

2) Ta lấy đạo hàm phương trình đã có tương ứng theo θ_1 (xem θ_2 không đổi) rồi lấy đạo hàm theo θ_2 (xem θ_1 không đổi) ; ta được :

$$J\ddot{\theta}_1 = -C(\theta_1 - \theta_2) \text{ và } J\ddot{\theta}_2 = +C(\theta_1 - \theta_2).$$

<u>*Chú ý :*</u> *Ta không quên rằng các momen của các ngẫu lực kéo về thực hiện tương ứng lên A và B liên quan đến thế năng $\mathscr{E}_P$ bởi :*

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}_P}{d\theta_1}\right)_{\theta_2} = -C(\theta_1 - \theta_2) \text{ đối với } A\,;$$

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}_P}{d\theta_2}\right)_{\theta_1} = -C(\theta_1 - \theta_2) \text{ đối với } B.$$

3) Dĩ nhiên là ta có thể tìm lại được hai phương trình trên bằng cách vận dụng riêng rẽ cho từng đĩa định lí momen động lượng theo cách chiếu lên trục quay thẳng đứng (Oz).

4) Lấy tổng và hiệu theo từng vế của hai phương trình vi phân ta có $\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = 0$, từ đó $\theta_1 + \theta_2 = \theta_0$, tính đến các điều kiện đầu.

$$J(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = -2C(\theta_1 - \theta_2),$$

từ đó $\theta_1 - \theta_2 = \theta_0 \cos\Omega t$ với $\Omega^2 = \frac{2C}{J}$.

Từ đó ta được :

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\theta_0(1 + \cos\Omega t) \text{ và } \theta_2 = \frac{1}{2}\theta_0(1 - \cos\Omega t)$$

Hai đĩa dao động ngược pha với nhau.

▶ Để luyện tập : Bài tập 1,2 và 3.

2.3.2. Dùng nguyên hàm của năng lượng

Điều quan trọng cần chú ý là nguyên hàm của năng lượng cho phép xác định chuyển động của một số hệ cơ phức tạp nào đó (rõ ràng là với điều kiện là chúng phải bảo toàn !) với một cách giải nhanh và đẹp. Đặc biệt là trường hợp mà chuyển động của hệ hoàn toàn xác định chỉ bởi một thông số. Gọi x là thông số đó, nguyên hàm của năng lượng dẫn đến phương trình dạng :

$$f(x)\dot{x}^2 + g(x) = \text{cte}A,$$

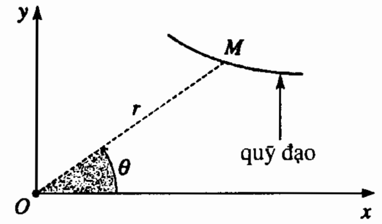
ở đây $f(x)$ là một hàm dương của x (vì $f(x)\dot{x}^2$ là động năng của hệ) và $g(x)$ là một hàm của x (biểu diễn thế năng).

Hằng số A là bằng cơ năng và được xác định bởi các điều kiện đầu.

<u>*Chú ý :*</u>

Trong trường hợp một chuyển động có nhiều thông số, đôi khi có thể đưa về một phương trình có dạng như trên bằng cách kết hợp một hoặc nhiều phương trình khác với nguyên hàm của năng lượng ; $f(x)\dot{x}^2$ dĩ nhiên không còn là động năng (nhưng $f(x)$ vẫn còn là dương) $g(x)$ không còn là thế năng.

Thí dụ như một hạt M dịch chuyển trong trường lực xuyên tâm có quỹ đạo phẳng xác định bởi các thông số r và θ (h.12).



H.12. *Hạt M trong trường các lực xuyên tâm.*

Nguyên hàm của năng lượng cho ta : $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathscr{E}_P(r) = \text{cte}\,\mathscr{E}_M$.

Theo định luật về diện tích thì $r^2\dot{\theta} = \text{cte}\,C$ *,từ đó khử* $\dot{\theta}$ *ta có :*

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathscr{E}_P(r)\right) = \mathscr{E}_M ,$$

đúng là ta tìm lại được phương trình dạng $f(r)\dot{r}^2 + g(r) = \text{cte}\,A$.

Nghiên cứu đồ thị hàm $g(x)$ cho ta xác định nhiều điều về chuyển động của hệ nghiên cứu. Giả thiết rằng đường cong của hàm $g(x)$ có dạng như vẽ ở *hình* 13 và ở thời điểm đầu hệ được buông ra từ vị trí x_0 không có vận tốc xuất phát; vậy ta có :

$$g(x_0) = A$$

Gọi x_m và x_M là những giá trị của x tương ứng với $g(x)$ cực tiểu và cực đại.

Những giá trị cho phép của x chỉ là những giá trị thỏa mãn :

$$g(x) \le A = g(x_0) \text{ vì } f(x)\dot{x}^2 + g(x) = \text{cte}A \text{ với } f(x) \text{ dương.}$$

■ Trong trường hợp (*H.*13) ở đấy $x_0 = x_2$, hay $x_0 = x_3$:
($A = A_2$ với $g(x_m) < A_2 < g(x_M)$), x chỉ có thể dao động giữa các giá trị x_2 và x_3.

Đặc biệt là nếu hệ được buông ra không có vận tốc đầu từ vị trí x_m, hệ cứ đứng yên ở vị trí đó (trong những điều kiện này, $x_2 = x_3 = x_m$). Các giá trị x_m của x ở đấy hàm $g(x)$ là cực tiểu là một vị trí cân bằng bền của hệ. Có thể tính chu kì của những dao động nhỏ của hệ quanh vị trí cân bằng bền x_m.

Đạo hàm phương trình $f(x)\dot{x}^2 + g(x) = A$, sau khi giản lược $\dot{x}$, ta có :

$$\frac{df}{dx}\dot{x}^2 + 2f(x)\ddot{x} + \frac{dg}{dx} = 0 \quad (1)$$

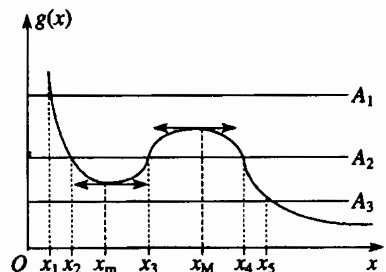
sau đó đặt $x = x_m + \varepsilon$ và tuyến tính hóa phương trình trên (| ε | là rất "nhỏ")(*) :

$$2f(x_m)\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x_m}\varepsilon = 0 \quad \left(\text{vì } \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_m} = 0\right) \quad (2)$$

Biết rằng các hằng số $f(x_m)$ và $\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x_m}$ là dương, phương trình vi phân của ε mà chúng ta vừa tìm được có nghiệm hình sin với vận tốc góc $\omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x_m}}{2f(x_m)}}$ và có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

(*) $\dot{x}^2 = \dot{\varepsilon}^2$*: số hạng bậc hai, bỏ qua.*
$\ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$*: số hạng bậc 1, vậy $f(x)$ được thay thế bằng* $f(x_m)$*;*
khai triển $\frac{dg}{dx}$ *đến bậc 1 :*

$$\left(\frac{dg}{dx}\right)_x = \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_m} + \varepsilon\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x_m} .$$



H.13. *Đồ thị của hàm* $g(x)$.

■ Trong trường hợp (*h*.13) mà ở đấy $x_0 = x_1$ ($A = A_1$ với $A_1 > g(x_M)$), hay $x_0 = x_4$ ($A = A_2$), hay $x_0 = x_5$ ($A = A_3$ với $A_3 < g(x_m)$) ta nhận thấy rằng x có thể phân kì.

Vị trí x_M có một vai trò đặc biệt. Nếu từ vị trí này hệ được buông ra không có tốc độ ban đầu, phương trình vi phân (1) cho ta thấy là hệ cân bằng $\left(\left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_M} = 0\right)$; nhưng phương trình vi phân (2) xét ở x_M cho ta thấy rằng một khi hệ ra khỏi vị trí này một chút thì hệ cứ tự ra xa thêm vì hằng số $f(x_M)$ là dương và $\left(\frac{d^2g}{dx^2}\right)_{x_M}$ là âm.

Các giá trị x_M của x mà ứng với giá trị này $g(x)$ là cực đại là *vị trí cân bằng không bền* của hệ.

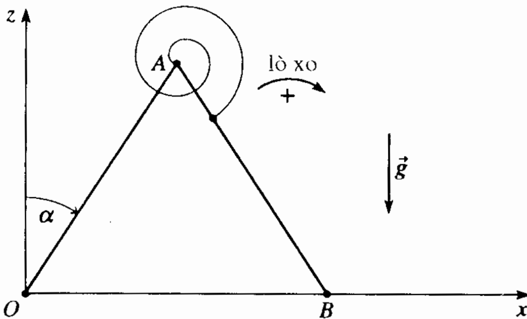
Áp dụng 3

Chuyển động của hai thanh nối khớp

Xét hai thanh như nhau, đồng chất, OA và OB nối khớp với nhau ở A (mỗi thanh có khối lượng m, chiều dài 2b, momen quán tính $J = \frac{1}{3}mb^2$ *đối với trục vuông góc và đi qua tâm của thanh). O là cố định và đầu mút B có thể trượt không ma sát theo trục nằm ngang (Ox); hệ nằm trên mặt thẳng đứng (Oxz) của hệ quy chiếu Galilê.*

Các liên kết ở A và ở O là hoàn chỉnh, cho phép góc α *có tất cả các giá trị giữa O và* π. *Một lò xo xoắn với hằng số đàn hồi C liên kết OA và OB và thực hiện ngẫu lực* $(-2C\alpha)$ *giữa hai thanh. Ở thời điểm đầu, hệ được buông ra từ vị trí* $\alpha = \alpha_0$ *không có tốc độ đầu.*

1) *Xác định là có tồn tại và tính ổn định của các vị trí cân bằng. Đặt* $p = \frac{2C}{mgb}$.



H.14. *Hai thanh có khớp nối trên mặt đất.*

2) *Tính chu kì của các dao động nhỏ của hệ quanh vị trí cân bằng bền với p = 2, và p = 0,9.*

Cho biết : $b = 1$ m; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

1) Vì không có ma sát (không có ma sát ở khớp nối ở O và A, không có cả ở chỗ tiếp xúc giữa thanh AB và trục (Ox)), cơ năng của hệ được bảo toàn :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \text{cte}.$$

Thế năng $\mathcal{E}_P$ bao gồm :

• thế năng do trọng trường :

$$2mgb\cos\alpha \ (+\text{cte}),$$

• thế năng của lò xo :

$$\frac{1}{2}C(2\alpha)^2,$$

vậy tổng cộng là : $\mathcal{E}_P = 2mgb\cos\alpha + 2C\alpha^2(+\text{cte})$, ta còn có thể viết dưới dạng :

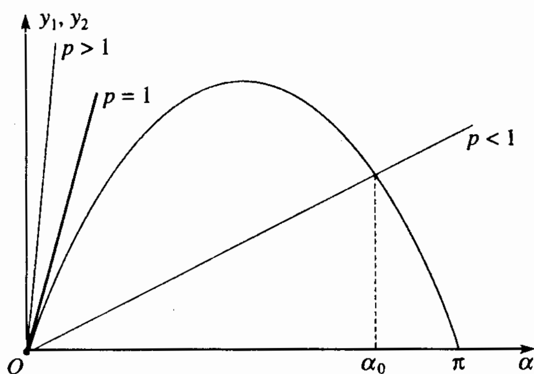
$$\mathcal{E}_P = mgb(2\cos\alpha + p\alpha^2)(+\text{cte}),$$

ở đây có đưa vào thông số p định nghĩa ở đề bài.

Các vị trí cân bằng tương ứng với các giá trị α làm cho $\mathcal{E}_P$ cực trị ; ta hãy tính đạo hàm của $\mathcal{E}_P$:

$$\frac{d\mathcal{E}_P}{d\alpha} = 2mgb(-\sin\alpha + p\alpha).$$

Đạo hàm này triệt tiêu khi $\sin\alpha = p\alpha$: ta vẽ ở *hình* 15 các đồ thị của hàm $y_1 = \sin\alpha$ và $y_2 = p\alpha$ đối với những giá trị khác nhau của thông số p.



H.15. *Đồ thị của hàm* $y_1 = \sin\alpha$ *và* $y_2 = p\alpha$.

Ta nhận thấy rằng khi $p \geq 1$, chỉ có một vị trí cân bằng $\alpha_e = 0$ và khi $p < 1$ có hai vị trí cân bằng là $\alpha_e = 0$ và $\alpha_e = \alpha_0$ xác định bởi $\sin\alpha_0 = p\alpha_0$.

Tính ổn định của các vị trí cân bằng biết được theo dấu của đạo hàm bậc hai của $\mathscr{E}_P$; đạo hàm bậc hai này là $\dfrac{d^2\mathscr{E}_P}{d\alpha^2} = 2mgb(-\cos\alpha + p)$.

Nếu $\cos\alpha_e < p$, đạo hàm bậc hai là dương, $\mathscr{E}_P$ là cực đại ở α_e, cân bằng là không bền.

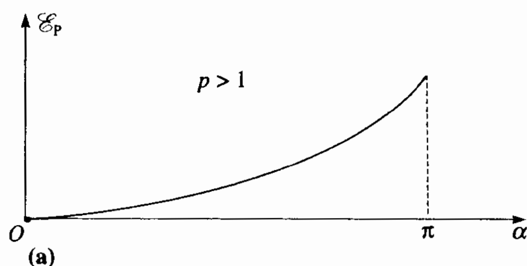
Nếu $\cos\alpha_e > p$ đạo hàm bậc hai là âm, $\mathscr{E}_P$ là cực tiểu ở α_e, cân bằng là bền.

Đối với $p > 1, \alpha_e = 0$ vậy đó là một vị trí cân bằng bền.

Đối với $p < 1, \alpha_e = 0$ là một vị trí cân bằng không bền và $\alpha_e = \alpha_0$ là một vị trí cân bằng bền vì $-\cos\alpha_o + p = -\cos\alpha_0 + \dfrac{\sin\alpha_0}{\alpha_0}$

$$= \cos\alpha_0\left(-1 + \frac{\text{tg}\alpha_0}{\alpha_0}\right) > 0.$$

Chú ý rằng đối với $p = 1$, $\alpha_e = 0$ là cân bằng phiếm định. Ta vẽ ở *hình* 16 đường cong biểu diễn thế năng theo hàm của α đối với các giá trị khác nhau của p (lấy $\mathscr{E}_P(0) = 0$).



2) Động năng của thanh OA được tính theo định lí HUYGENS :

$$\mathscr{E}_{K,OA} = \frac{1}{2}(J + mb^2)\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2.$$

Động năng của thanh AB được tính theo định lí KŒNIG :

$$\mathscr{E}_{K,AB} = \frac{1}{2}mv(G_{AB})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2.$$

Biết rằng $\overrightarrow{OG}_{AB} = 3b\sin\alpha\,\vec{e}_x + b\cos\alpha\,\vec{e}_z$, ta suy ra :

$$\vec{v}(G_{AB}) = 3b\cos\alpha\,\dot{\alpha}\,\vec{e}_x - b\sin\alpha\,\dot{\alpha}\,\vec{e}_z$$

và $$\mathscr{E}_{K,AB} = mb^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{2}{3} + 4\cos^2\alpha\right).$$

Tổng cộng lại, động năng của toàn bộ là :

$$\mathscr{E}_K = \mathscr{E}_{K,OA} + \mathscr{E}_{K,AB} = 4mb^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{1}{3} + \cos\alpha\right),$$

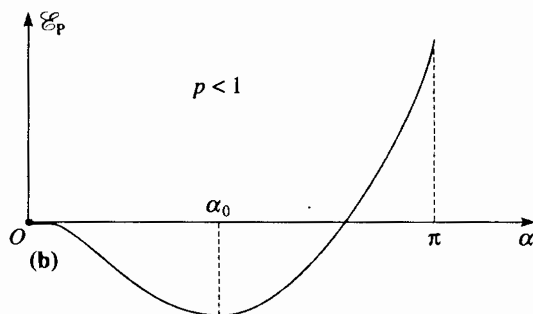
và sự bảo toàn cơ năng của hệ, có chú ý đến các điều kiện ban đầu, cho ta :

$$4mb^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{1}{3} + \cos^2\alpha\right) + mgb(2\cos\alpha + p\alpha^2)$$
$$= \text{cte}$$
$$= mgb(2\cos\alpha_0 + p\alpha_0^2).$$

Đặt $\alpha = \alpha_e + \varepsilon$ (với $\alpha_e = 0$ hay α_0, và ε là rất nhỏ), thực hiện khai triển biểu thức trên giới hạn ở các số hạng bậc 2 của ε.

Biết rằng :

$$\mathscr{E}_P(\alpha) = \mathscr{E}_P(\alpha_e + \varepsilon)$$
$$= \underset{\underset{\text{cte}}{\downarrow}}{\mathscr{E}_P(\varepsilon)} + \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\left(\frac{d\mathscr{E}_P}{d\alpha}\right)_{\alpha_e}}\varepsilon + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathscr{E}_P}{d\alpha^2}\right)_{\alpha_e}\varepsilon^2,$$



H.16. *Các đường cong biểu diễn thế năng* $\mathscr{E}_P(\alpha)$. **a.** *Đối với* $p > 1$, $\alpha_e = 0$ *là một vị trí cân bằng bền.* **b.** *Đối với* $p < 1$, $\alpha_e = 0$ *là một vị trí cân bằng không bền và* $\alpha_e = \alpha_0$ *là một vị trí cân bằng bền.*

ta có :

$$4mb^2\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha_e\right)\dot{\varepsilon}^2$$
$$+2mgb\left(-\cos\alpha_e+p\right)\varepsilon^2=\text{cte},$$

rồi lấy đạo hàm, sau một vài phép giản lược, ta có :

$$4b\left(\frac{1}{3}+\cos^2\alpha_e\right)\ddot{\varepsilon}+g\left(-\cos\alpha_e+p\right)\varepsilon=0.$$

Ta nghiên cứu các trường hợp :

• đối với $p > 1$, $\alpha_e = 0$ vị trí cân bằng là bền. Phương trình trên dẫn đến :

$$\ddot{\varepsilon}=-\frac{3g}{16b}(p-1)\varepsilon,$$

mà nghiệm là hình sin có chu kì :

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{16b}{3g(p-1)}}.$$

Thay bằng số : $p = 2$, $T_1 = 4,63$ s;

• đối với $p > 1$, $\alpha_e = 0$ là vị trí cân bằng bền. Phương trình bấy giờ được viết thành :

$$\ddot{\varepsilon}=\frac{3g}{4b}\frac{p-\cos\alpha_0}{1+3\cos^2\alpha_0}\varepsilon$$

và nghiệm hình sin có chu kì :

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{4b(1+3\cos^2\alpha_0)}{3g(p-\cos\alpha_0)}}$$

Thay bằng số : $p = 0,9$, $\alpha_0 = 0,79$ rad hay 45° và $T = 8,25$ s.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỊNH LÍ VỀ ĐỘNG NĂNG (HAY LÀ CÔNG SUẤT ĐỘNG NĂNG)

• Định lí về công suất động năng đối với một vật rắn trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$.

Đối với vật rắn chuyển động trong hệ quy chiếu Galilé đạo hàm của động năng bằng công suất của các tác động cơ ngoại tác động lên vật rắn :

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt}=\mathcal{P}_{ext}$$

• Định lí về động năng đối với tập hợp $\mathcal{S}$ các vật rắn $\mathcal{S}_i$ trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt}=\mathcal{P}_{ext}+\sum_{i,j}\mathcal{P}_{int,\mathcal{S}_i\leftrightarrow\mathcal{S}_j}.$$

Mặc dầu định luật tác động và phản tác động cho thấy tổng các tác động cơ giữa các vật rắn $\mathcal{S}_j$ là bằng không, không có lí do gì để công suất các tác động cơ nội $\mathcal{S}$ là bằng không, và điều tiên nghiệm là không bằng không.

• Định lí về công suất động năng và động năng đối với một hệ kín $\mathcal{S}$ bất kì trong hệ quy chiếu Galilé $\mathcal{R}$

$$\frac{d\mathcal{E}_K}{dt}=\mathcal{P}_{ext}+\mathcal{P}_{int},$$

từ đó lấy tích phân giữa hai thời điểm t_1 và t_2 ta có :

$$\mathcal{E}_K(t_2)-\mathcal{E}_K(t_1)=W_{ext}+W_{int}$$

Biến thiên động năng của một hệ kín $\mathscr{S}$ bất kì trong hệ quy chiếu galilé $\mathscr{R}$ giữa hai thời điểm là bằng công của tất cả các tác động cơ ngoại và nội tác động lên hệ $\mathscr{S}$ giữa hai thời điểm đó.

• **Định lí về công suất động năng đối với một hệ kín $\mathscr{S}$ bất kì trong hệ quy chiếu không galilé $\mathscr{R}$ '.**

Trong một hệ quy chiếu không galilé $\mathscr{R}$ ', ta phải thêm công suất của các lực quán tính kéo theo vào biểu thức của định lí công suất động năng :

$$\frac{d\mathscr{E}'_K}{dt} = \mathscr{P}'_{ext} + \mathscr{P}'_{int} + \mathscr{P}'_{f_{ie}}.$$

• **Công suất của các tác động cơ nội**

Công suất, và như vậy công, của các tác động cơ nội đối với một hệ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu trong đó ta tính chúng : $\mathscr{P}_{int} = \mathscr{P}'_{int}$

• **Định lí về công suất động năng (và động năng) của một hệ kín $\mathscr{S}$ bất kì trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}$***

Trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}$*, mà tiên nghiệm không phải là galilé, các định lí về công suất động năng và về động năng được viết như là ở trong hệ quy chiếu galilé :

$$\frac{d\mathscr{E}_K^*}{dt} = \mathscr{P}_{ext}^* + \mathscr{P}_{int}^* \text{ và } \mathscr{E}_K^*(t_2) - \mathscr{E}_K^*(t_1) = W_{ext}^* + W_{int}^*.$$

■ Cơ năng của một hệ chất

• Cơ năng $\mathscr{E}_M$ của một hệ $\mathscr{S}$ là tổng động năng $\mathscr{E}_K$ và thế năng $\mathscr{E}_P$ (nội và ngoại) : $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}}$.

Định lí động năng đối với một hệ kín $\mathscr{S}$ dẫn đến $d\mathscr{E}_M = \delta W_{NC}$, ở đây δW_{NC} là công nguyên tố của tất cả tác động không bảo toàn (tác động nội và ngoại không dẫn suất từ một thế năng nào).

• Hệ kín $\mathscr{S}$ được gọi là bảo toàn nếu :

• Tất cả các tác động cơ tác dụng lên $\mathscr{S}$ là dẫn suất từ một thế năng.

• Các tác động cơ tác dụng lên $\mathscr{S}$ mà không phải là dẫn suất từ một thế năng đều không làm việc.

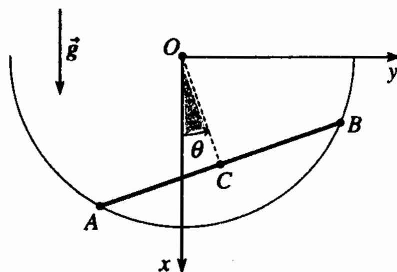
Cơ năng $\mathscr{E}_M$ của một hệ kín và bảo toàn là được bảo toàn trong quá trình chuyển động. Phương trình $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_{int}} + \mathscr{E}_{P_{ext}} = \text{cte}$ là một nguyên hàm của chuyển động :đó là nguyên hàm của năng lượng.

• Trong một hệ quy chiếu không galilé, các kết quả trên còn có giá trị với điều kiện là có tính đến công của các lực quán tính kéo theo, chúng có thể xem như là dẫn suất từ một thế năng.

Bài tập có giải

Dao động của một thanh trên nửa vòng tròn

ĐỀ BÀI



Một thanh đồng chất AB, tâm C chiều dài $2l$, momen quán tính $J = \frac{1}{3}ml^2$ đối với trục vuông góc với thanh và đi qua C, trượt không ma sát bên trong một nửa vòng tròn tâm O bán kính $R = \frac{2l}{\sqrt{3}}$. Nửa vòng tròn này nằm trong mặt thẳng đứng (Oxy) của một hệ quy chiếu galilé.

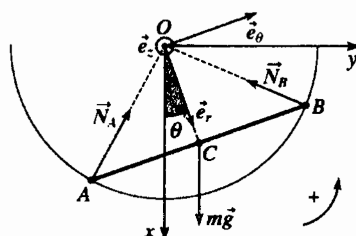
1) Tìm phương trình vi phân mà góc θ là nghiệm, góc θ xác định bởi $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.

2) Tính chu kì các dao động nhỏ của thanh quanh vị trí cân bằng của nó.

LỜI KHUYÊN

Chúng tôi đưa ra nhiều cách giải với mục đích có thể so sánh ưu điểm hay nhược điểm của từng cách.

GIẢI



1) Trước hết chú ý là trong quá trình chuyển động :

- thanh AB luôn luôn vuông góc với OC ;
- khoảng cách OC không đổi và bằng :

$$OC = \sqrt{R^2 - l^2} = \frac{R}{2}.$$

■ **Phương pháp thứ nhất** (phương pháp "cổ điển").

• Trong hệ quy chiếu galilé, áp dụng cho thanh định lí về quán tâm. Kí hiệu $(N_{Ar}, N_{A\theta})$ và $(N_{Br}, N_{B\theta})$ là các thành phần của các phản lực $\vec{N}_A$ và $\vec{N}_B$ của nửa vòng tròn lên thanh, chiếu lên các trục tọa độ cực $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}mR\ddot{\theta} = N_{Ar} + N_{Br} + mg\cos\theta \\ \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 = N_{A\theta} + N_{B\theta} - mg\sin\theta ; \end{cases}$$

• Trong hệ quy chiếu trọng tâm của thanh, áp dụng cho thanh định lí momen động lượng ở C, khi chiếu lên Oz :

$$J\ddot{\theta} = (\overrightarrow{CA} \wedge \vec{N}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{N}_B).u_z = l(N_{Ar} - N_{Br}).$$

Vì không có ma sát, phương của các phản lực $\vec{N}_A$ và $\vec{N}_B$ đi qua O và gọi N_A và N_B là cường độ của các lực đó, ta có :

$$N_{Ar} = -N_A\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{N_A}{2}; \quad N_{A\theta} = N_A\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}N_A ;$$

$$N_{Br} = -N_B\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{N_B}{2}; \quad N_{B\theta} = -N_B\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}N_B$$

Vậy khử N_A và N_B trong các phương trình trên sau "vài" phép tính ta có :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta.$$

Ta nhận thấy rằng phương pháp này không hay. Hai phương pháp tiếp theo đây sinh động hơn.

■ **Phương pháp thứ hai** (phương pháp năng lượng)

Áp dụng định lí động năng cho thanh trong hệ quy chiếu Galilé. Chỉ có trọng lượng làm việc, vì không có bất kì ma sát nào, cơ năng của thanh là một hằng của chuyển động.

$$\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \text{cte},$$

vậy : $$\frac{1}{2}mv^2(C) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + m\vec{g}\,.\,\overrightarrow{OC} = cte,$$

với $\vec{v}(C) = \frac{R}{2}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Ta có :

$$\frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgR\cos\theta = \text{cte},$$

và sau khi lấy đạo hàm ta lại tìm được phương trình trên.

■ **Phương pháp thứ ba**

Ta có thể xem rằng trong quá trình chuyển động tam giác OAB là không biến dạng. Vậy ta có một vật rắn (mà khối lượng phân bố ở cạnh AB) quay quanh một điểm cố định O ; momen quán tính của vật rắn này đối với trục (Oz) được tính như định lí HUYGENS :

$$J_{Oz} = J + mOC^2 = \frac{1}{2}mR^2.$$

Đối với phương pháp cuối này cần ngẫm nghĩ một chút. Trong thời gian đầu, có vẻ như là phương pháp năng lượng là thích hợp nhất cho bài toán này.

Bây giờ ta áp dụng định lí momen động lượng của vật rắn này ở O trong hệ quy chiếu $(O;\, x,\, y,\, z)$, chiếu lên (Oz) :

$$J_{Oz}\ddot{\theta} = (\overrightarrow{OC} \wedge m\vec{g})\,.\,\vec{e}_z = -mg\frac{R}{2}\sin\theta,$$

và ta tìm lại được cùng một phương trình.

2) Vị trí cân bằng của thanh rõ ràng là được xác định bởi $\theta = 0$. Khi θ nhỏ, độ nghiêng θ nghiệm đúng phương trình :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\theta,$$

và thanh thực hiện những dao động hình sin chu kì là :

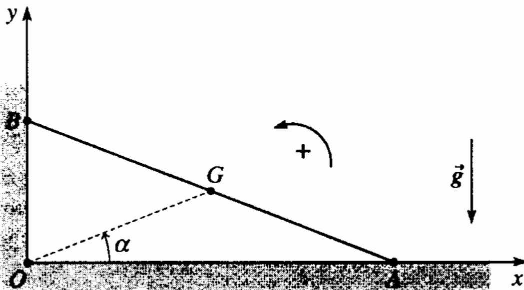
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP GIÁO TRÌNH

1 Chuyển động của một thanh tựa lên tường

Hệ quy chiếu trái đất được xem là galilé. Một thanh AB, đồng nhất, chiều dài $2b$ tâm G ở giữa của AB, một đầu đặt lên mặt đất nằm ngang, đầu kia tựa lên bức tường thẳng đứng. Vị trí của thanh được xác định theo góc $\alpha = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OG})$. Các tiếp xúc ở A và ở B được xem là không ma sát.

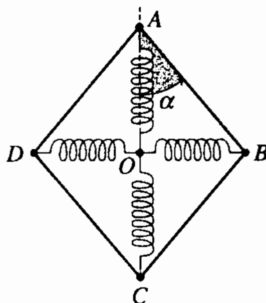


1) Viết nguyên hàm của năng lượng với giả thiết rằng ở thời điểm đầu thanh đứng yên với độ nghiêng α_o.

2) Tính phản lực $\vec{R}_B$ của bức tường lên thanh và từ đó suy ra ở độ nghiêng α_1 nào thanh rời khỏi bức tường. Cho momen quán tính của thanh so với trung trực là $J = \frac{1}{3}mb^2$.

2 Chuyển động của một hình thoi nối khớp

Bốn thanh giống nhau (mỗi thanh có chiều dài b, khối lượng m và momen quán tính đối với trục vuông góc với thanh và đi qua điểm giữa là $J = \frac{1}{12}mb^2$) được nối với nhau làm thành một hình thoi biến dạng được (tất cả các khớp nối là không có ma sát).



Bốn lò xo giống nhau, hằng số đàn hồi là k, khối lượng không đáng kể, chúng nối với nhau tại điểm O và nối với bốn đỉnh A, B, C và D của hình thoi.

Tập hợp tạo ra như vậy nằm yên không ma sát trên một mặt nằm ngang trong hệ quy chiếu galilé.

Ta đo độ biến dạng của hình thoi bằng cách đo góc α giữa đường chéo AC và cạnh AB.

Các lò xo có độ dài tự nhiên của chúng khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Đầu tiên hệ được giữ cho biến dạng với góc α_0 rồi được buông ra không có vận tốc ban đầu.

1) Xác định phương trình vi phân mà góc α tuân theo.

2) Trong trường hợp mà α_0 gần $\frac{\pi}{4}$, xác định diễn biến của α theo thời gian.

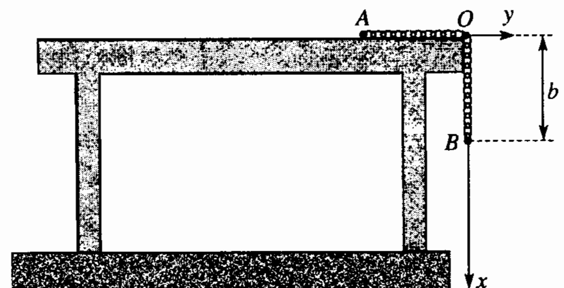
Tính chu kì của các dao động nhỏ của hệ.

3 Chuyển động của một dây xích trên bàn

Hệ quy chiếu trái đất được xem là galilé. Một dây xích AB đồng chất, không đàn hồi có độ dài d và khối lượng m, đặt ở mép của một cái bàn nằm ngang, mút B của dây xích nằm cách rìa bàn một khoảng b. Dây xích được thả lỏng không có tốc độ đầu.

Một mặt ta xem như không có ma sát bên trong dây xích mặt khác cũng xem là không có ma sát giữa bàn và dây xích.

Ta hãy nghiên cứu sự rơi của dây xích trước khi mút B chạm đất.



1) Dùng phương pháp năng lượng, xác định phương trình vi phân của tọa độ x của mút B của xích theo trục thẳng đứng (Ox) ở thời điểm t (giả thiết là $x < d$).

Từ đó tìm quy luật của $x(t)$.

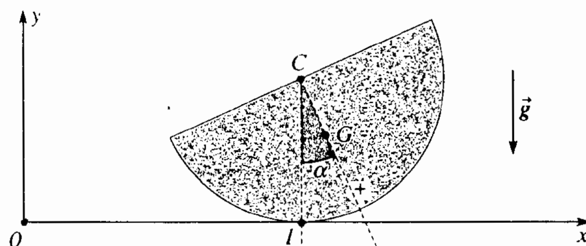
2) Xác định ở thời điểm t lực $\vec{R}$ mà bàn tác dụng lên dây xích.

SỬ DỤNG NHỮNG ĐIỀU ĐÃ BIẾT

4 Dao động của nửa cái đĩa trên mặt nằm ngang

Ta xét nửa cái đĩa $\mathscr{D}$ đồng chất tâm C khối tâm G bán kính R và khối lượng m. Hệ quy chiếu Trái Đất $(O; x, y, z)$ được xem là Galilé. Tất cả đều ở trong mặt thẳng đứng (Oxy) $\mathscr{D}$ dịch chuyển không ma sát trên mặt nằm ngang (Oxz). Ta kí hiệu I là điểm tiếp xúc giữa mặt đất và $\mathscr{D}$ và vị trí của $\mathscr{D}$ được xác định theo tọa độ x của tâm C và theo góc $\alpha = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CG})$. Ở thời điểm ban đầu, ta thả nửa đĩa không có tốc độ đầu từ vị trí $\alpha = \alpha_0$. Cho $CG = b = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Momen quán tính của $\mathscr{D}$ đối với trục đi qua C và vuông góc với $\mathscr{D}$ là $J = \dfrac{1}{2}mR^2$.



1) Ứng dụng định lí tổng hợp động lực, biểu diễn tốc độ $\vec{v}(G)$ của khối tâm G theo hàm của b, α và $\dot{\alpha}$.

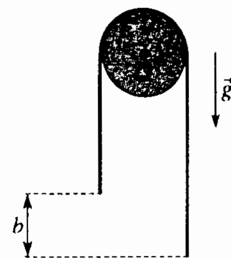
2) Tính động năng $\mathscr{E}_K$ của $\mathscr{D}$ theo hàm của J, m, b và $\dot{\alpha}$.

3) Viết nguyên hàm của chuyển động ; sau đó lập một phương trình vi phân bậc hai của α.

4) Giả sử rằng α nhỏ : tuyến tính hóa phương trình có được và suy ra chu kì T của những dao động nhỏ của $\mathscr{D}$ chung quanh vị trí cân bằng. Ban đầu biểu diễn T theo hàm của J, R, b, m và cường độ trọng trường g, sau đó biểu diễn theo hàm chỉ của R và g.

5 Chuyển động của dây trên ròng rọc

Một sợi dây đồng chất, không đàn hồi, khối lượng m và chiều dài a vắt qua một ròng rọc khối lượng M, bán kính R và momen quán tính $J = \dfrac{1}{2}MR^2$ đối với trục.



Ròng rọc có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang cố định trong hệ quy chiếu trái đất, được xem như là Galilé.

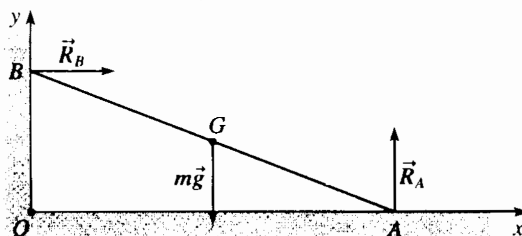
Ở thời điểm đầu, hệ đứng yên hai mút của dây chênh lệch nhau một độ cao b.

Xác định chuyển động sau đấy của hệ (với giả thiết là dây luôn luôn tiếp xúc với ròng rọc).

BÀI GIẢI

1 *Ở áp dụng 1 của chương 2 đã nghiên cứu động học của thanh này.*

1) *Khi không có ma sát, các tác động tiếp xúc của mặt đất lên thanh và vách lên thanh được biểu diễn bởi hai lực (xem chương 5). $\vec{R}_A$ tác dụng ở A là vuông góc với mặt đất và $\vec{R}_B$ tác dụng ở B là vuông góc với bức tường.*



Do đó công của các lực của các lực tiếp xúc này là bằng không ($\vec{R}_A$ vuông góc với dịch chuyển của A, và $\vec{R}_B$ vuông góc với dịch chuyển của B). Chỉ có trọng lượng làm việc và cơ năng của thanh là không đổi khi chuyển động :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \text{cte}$$

Động năng được tính theo định lí Koenig:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv(G)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}mb^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2$$

(vectơ quay $\overrightarrow{\Omega}$ của thanh là bằng $\overrightarrow{\Omega} = -\dot{\alpha}\vec{e}_z$), từ đó :

$$\mathscr{E}_M = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 + mg\,b\sin\alpha = mg\,b\sin\alpha_0 .$$

Chú ý :

Rõ ràng là ta có thể tìm lại phương trình chuyển động này bằng cách vận dụng đối với thanh định lí tổng hợp động lực và momen động lượng ở G, điều này cho ta tương ứng :

$$m\vec{a}(G) = m\vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B,\ \text{vậy} \left| \begin{aligned} & mb(-\ddot{\alpha}\sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cos\alpha) = R_B \\ & mb(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) = R_A - mg \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Biết rằng $\vec{\Omega} = -\dot{\alpha}\,\vec{e}_z$ ta có :

$$-\frac{1}{3}mb^2\ddot{\alpha}\,\vec{e}_z = \overrightarrow{GA}\wedge\vec{R}_A + \overrightarrow{GB}\wedge\vec{R}_B \text{ vậy } -\frac{1}{3}mb^2\ddot{\alpha} = b(R_A\cos\alpha - R_B\sin\alpha).$$

Khử R_A và R_B đối với ba phương trình này và tích phân phương trình có được, ta có nguyên hàm của năng lượng.

Như vậy qua thí dụ này ta thấy tính hiệu quả của nguyên hàm năng lượng (khi có thể áp dụng được) !

2) *Để xác định $\vec{R}_B$, chỉ cần thay thế, trong các phương trình (1), $\ddot{\alpha}$ và $\dot{\alpha}$ bởi các giá trị của chúng theo hàm của α (biểu thức $\ddot{\alpha}$ có được khi lấy đạo hàm theo thời gian nguyên hàm của năng lượng). Ta có được :*

$$R_B = \frac{3}{2}mg\cos\alpha\left(\frac{3}{2}\sin\alpha - \sin\alpha_0\right).$$

Thanh rời khỏi tường khi phản lực $\vec{R}_B$ triệt tiêu nghĩa là ứng với độ nghiêng α_1 xác định bởi $\sin\alpha_1 = \frac{2}{3}\sin\alpha_0$.

2 *Hệ có thể trượt không ma sát trên mặt nằm ngang. Áp dụng định lí tổng hợp động lực cho toàn bộ hệ, chiếu lên mặt nằm ngang, ta nhận thấy rằng gia tốc của quán tâm O của hệ là bằng không (các lực ngoại không có thành phần nằm ngang); chú ý đến những điều kiện đầu, O như vậy là cố định khi các thanh dịch chuyển. Tất cả các khớp nối của hình thoi là không ma sát, cơ năng của hệ được bảo toàn trong quá trình chuyển động :*

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \text{cte}$$

Ta hãy tính động năng $\mathscr{E}_K$ của hình thoi ; đối với mỗi thanh ta có thể viết :

$$\mathscr{E}_{K_i} = \frac{1}{2}mv^2(G_i) + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 \quad \text{với } v^2(G_i) = \left(\frac{b}{2}\dot{\alpha}\right)^2,$$

vì mỗi khoảng cách OG_i là không đổi và bằng $\frac{b}{2}$.

Tổng cộng lại, đối với hình thoi, ta có : $\mathscr{E}_K = 4\left(\frac{1}{6}mb^2\dot{\alpha}^2\right) = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2$.

Thế năng tương ứng của các lò xo trong bốn lò xo là :

- *Đối với các lò xo OA và OC :*

$$\mathscr{E}_{P,OA} = \mathscr{E}_{P,OC} = \frac{1}{2}k\left(b\cos\alpha - b\cos\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

- *Đối với các lò xo OB và OD :*

$$\mathscr{E}_{P,OB} = \mathscr{E}_{P,OD} = \frac{1}{2}k\left(b\sin\alpha - b\sin\frac{\pi}{4}\right)^2;$$

từ đó tổng cộng là :

$$\mathscr{E}_P = 2\left(\mathscr{E}_{P,OA} + \mathscr{E}_{P,OB}\right) = 2kb^2\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)\right]$$

hay ta cũng có thể viết dưới dạng :

$$\mathscr{E}_P = 2kb^2\left[1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Từ đó để ý đến các điều kiện đầu ta suy ra :

$$\mathscr{E}_M = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 + 2kb^2\left[1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \text{cte} = 2kb^2\left[1 - \cos\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

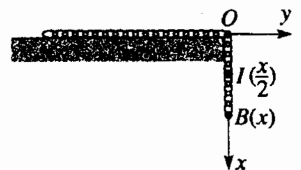
2) *Tính đạo hàm phương trình có được trên đây, sau một số ước lược ta có :*

$$\ddot{\alpha} = \frac{3k}{2m}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Nếu góc α gần với $\frac{\pi}{4}$, ta có thể đặt $\alpha = \varepsilon + \frac{\pi}{4}$ và ta có :

$\ddot{\varepsilon} = -\frac{3k}{2m}\varepsilon = -\Omega^2\varepsilon$, *với* $\Omega^2 = \frac{3k}{2m}$, *tính đến các điều kiện đầu ta có nghiệm :* $\varepsilon = \alpha - \frac{\pi}{4} = \left(\alpha_0 - \frac{\pi}{4}\right)\cos\Omega t$. *Chu kì T của những dao động hình sin này là* $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$.

3 1) *Vì không có bất kì ma sát nào, cơ năng của dây xích được bảo toàn trong quá trình chuyển động :*



$$\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \text{cte}.$$

Mỗi điểm của dây xích đều có tốc độ như nhau, động năng $\mathscr{E}_K$ của dây xích là :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Chỉ trọng lượng của phần OB của dây xích làm việc : trọng lượng này đặt ở điểm giữa I của OB, thế năng của dây xích là :

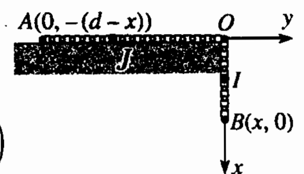
$$\mathscr{E}_P = -\left(\frac{m}{d}xg\right)\frac{x}{2}(+\text{cte})$$

Từ đó chúng ta rút ra phương trình :

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\frac{g}{d}x^2 = \text{cte}$ *và lấy đạo hàm ta được* $\ddot{x} = \frac{g}{d}x$.

Tính đến các điều kiện đầu, đối với x ta có định luật : $x = b\,\text{ch}\sqrt{\frac{g}{d}}\,t$.

2) *Xác định khối tâm G của dây xích :*



$$m\overrightarrow{OG} = \frac{m}{d}\left(x\overrightarrow{OI} + (d-x)\overrightarrow{OJ}\right),$$

vậy $m\overrightarrow{OG} = \frac{m}{2d}\left(x^2\vec{e}_x - (d-x)^2\vec{e}_y\right)$

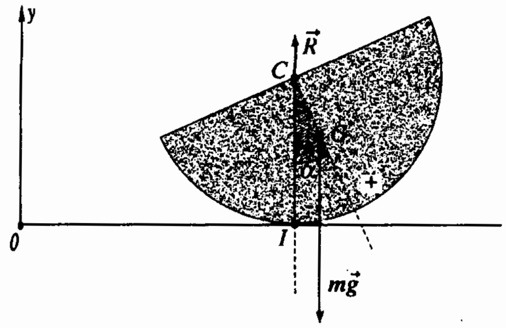
Định lí tổng hợp động lực $m\vec{a}(G) = m\vec{g} + \vec{R}$, *khi chiếu lên các trục ta được :*

$$\begin{cases} \frac{m}{d}(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) = R_x + mg \\ \frac{m}{d}(-\dot{x}^2 + (d-x)\ddot{x}) = R_y \end{cases}$$

Từ đó thay giá trị của x vào :

$$\begin{cases} R_x = mg\left[\frac{b^2}{d^2}\left(2\text{ch}^2\sqrt{\frac{g}{d}}t - 1\right) - 1\right] \\ R_y = mg\left[\frac{b}{d}\text{ch}\sqrt{\frac{g}{d}}t - \frac{b^2}{d^2}\left(2\text{ch}^2\sqrt{\frac{g}{d}}t - 1\right)\right] \end{cases}$$

Ta không nên ngạc nhiên khi tìm thấy thành phần nằm ngang R_y *khác không mặc dầu không có ma sát : thật vậy, cạnh bàn tác dụng lên dây xích một lực không phải là thẳng đứng. Chính là lực đó làm cho tâm quán tính của dây xích dịch chuyển theo (Oy).*



4 1) *Các lực tác dụng lên* $\mathcal{D}$, *trọng lượng* $m\vec{g}$ *và phản lực* $\vec{R}$ *đều thẳng đứng (phản lực* $\vec{R}$ *vuông góc với mặt (Oxz) vì không có ma sát). Áp dụng định lí tổng hợp động lực, chiếu lên trục (Ox)ta rút ra được là thành phần trên trục (Ox) của gia tốc của G là bằng không ; tính đến các điều kiện đầu thành phần trên (Ox) của vận tốc của G cũng là bằng không. Vậy* $\overrightarrow{OG}$ *có các thành phần :*

$$\begin{vmatrix} x + b\sin\alpha \\ R - b\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{từ đó} \quad \vec{v}(G) \begin{vmatrix} x + b\dot{\alpha}\cos\alpha = 0 \\ b\sin\alpha\dot{\alpha} \\ 0 \end{vmatrix}$$

và $v(G) = b\sin\alpha\dot{\alpha}\vec{e}_y$

2) *Động năng* $\mathcal{D}$ *được tính theo định lí KŒNIG :*

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv(G)^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}mb^2\sin^2\alpha\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(J - mb^2)\dot{\alpha}^2 .$$

3) *Vì không có ma sát, cơ năng của* $\mathcal{D}$ *được bảo toàn trong quá trình chuyển động* $\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \text{cte}$, *từ đó :*

$$\frac{1}{2}(J - mb^2\cos^2\alpha)\dot{\alpha}^2 + mg(R - b\cos\alpha) = \text{cte} .$$

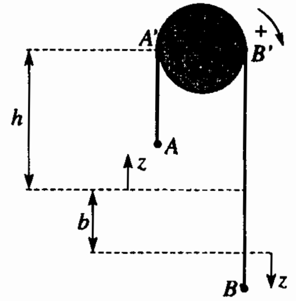
Lấy đạo hàm ta được :

$$(J - mb^2\cos^2\alpha)\ddot{\alpha} + mb^2\cos\alpha\sin\alpha\dot{\alpha}^2 + mgb\sin\alpha = 0 .$$

4) *Nếu* α *nhỏ, phương trình trên được đơn giản hóa thành* $(J - mb^2)\ddot{\alpha} + mgb\alpha = 0$ *và nửa đĩa* $\mathcal{D}$ *thực hiện những dao động nhỏ hình sin quanh vị trí* $\alpha = 0$ *với chu kì* $T = 2\pi\sqrt{\frac{J - mb^2}{mgb}}$ *mà bằng cách thay J và b bằng các giá trị của nó, ta còn có thể viết :*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(9\pi^2 - 32)R}{24\pi g}} .$$

5 *Chúng ta đưa ra hai phương pháp giải*



1) *Áp dụng định lí động năng cho toàn hệ (ròng rọc + dây). Gọi z là modun dịch chuyển của mỗi một điểm của dây so với vị trí ban đầu tại thời điểm t (ta giả thiết rằng z < h).*

Ở thời điểm này ròng rọc đã quay một góc θ xác định bởi z = Rθ.

Động năng của hệ là $\mathscr{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}_{\text{ròng rọc}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{z}^2}_{\text{dây}} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{z}^2$

Trong quá trình chuyển động chỉ các trọng lượng của các đoạn AA' và BB' của dây là làm việc.

• *Đối với AA', chiều dài (h - z), công suất của trọng lượng là :*

$$\mathscr{P}_{AA'} = -\frac{m}{a}(h - z)g\dot{z}$$

<u>*Chú ý :*</u>

Tất cả các điểm của đoạn AA' có cùng vận tốc $-\dot{z}$; *công suất* $\mathscr{P}_{AA'}$ *có được bằng cách cộng tất cả các công suất nguyên tố :* $\mathscr{P}_{AA'} = -\dot{z}g\int_{\text{đoạn } AA'} \text{d}m$. *Kết quả này tương tự hoàn toàn với kết quả ở bài tập 3, vì rằng :*

$$\mathscr{P}_{AA'} = -\frac{\text{d}\mathscr{E}_{P,AA'}}{\text{d}t}, \text{ với } \mathscr{E}_{P,AA'} = -\frac{mg}{2a}(h - z)^2 .$$

• *Đối với BB' có chiều dài là (h + b + z) công suất của trọng lượng là :*

$$\mathscr{P}_{BB'} = +\frac{m}{a}(h + b + z)g\dot{z} .$$

Từ đó, tổng cộng là $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{AA'} + \mathscr{P}_{BB'} = \frac{m}{a}(b + 2z)g\dot{z}$.

Định lí về công suất động năng cho ta : $\left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{z} = \frac{m}{a}(b + 2z)g$.

2) *Áp dụng định lí momen động lượng đối với toàn bộ (ròng rọc + dây) chiếu lên trục quay.*

Momen động lượng của toàn bộ đối với trục quay là :

$$L = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}}_{\text{ròng rọc}} + \underbrace{\frac{m}{a}(h-z)R\dot{z}}_{\text{đoạn AA' của dây}} + \underbrace{\frac{m}{a}(\pi R)R\dot{z}}_{\text{đoạn A'B' của dây}} + \underbrace{\frac{m}{a}(h+b+z)R\dot{z}}_{\text{đoạn BB' của dây}}$$

vậy $L = \left(\frac{M}{2} + m\right)R\dot{z}$ *vì chiều dài tổng cộng của dây là bằng :*

$$a = (h-z) + \pi R + (h+b+z).$$

Trong số các lực ngoại, chỉ các trọng lượng của các đoạn dây AA' và BB' là có momen khác không so với trục quay :

$$\mathcal{M}_{ext} = -\frac{m}{a}(h-z)Rg + \frac{m}{a}(h+b+z)Rg = \frac{m}{a}(b+2z)Rg .$$

Áp dụng định lí momen động lượng, ta tìm lại được phương trình : $\left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{z} = \frac{m}{a}(b+2z)g$. *Tích phân của phương trình này, chú ý đến các điều kiện đầu, ta được :* $z = \frac{b}{2}(\text{ch}\,\omega t - 1)$ *với* $\omega^2 \frac{4m}{M+2m}\frac{g}{a}$.

TIẾP XÚC GIỮA HAI VẬT RẮN ĐỊNH LUẬT VỀ MA SÁT

5

Mở đầu

Chắc chắn anh thường nghĩ rằng ma sát là những hiện tượng có hại (ngoài ra trong nhiều bài tập, ma sát được bỏ qua để khỏi dẫn đến những phép tính rắc rối), người ta phải giảm tối thiểu ma sát trong các máy và điều này là đúng ở một chừng mực nào đó.

Nhưng anh đã bao giờ đặt câu hỏi: trong cuộc đời anh, nếu không có ma sát thì sẽ ra sao ? Lúc đó, anh hãy tưởng tượng là anh luôn luôn phải đi bộ, phải lái xe trên mặt đất hoàn toàn bị đóng váng băng và hãy thử đoán trước tất cả các hệ quả xảy ra (hay là tất cả tác hại !).

Nhà vật lí học người Pháp Charles Augustin Coulomb (1736–1806), được mọi người biết đến vì các công trình về điện, cũng có nghiên cứu nhiều trong lĩnh vực cơ; ông đã công bố vào năm 1781 một tập kỷ yếu có tên là "Lí thuyết của những máy cơ đơn giản" trong đó ông nghiên cứu về ma sát giữa hai vật tiếp xúc nhau.

MỤC TIÊU

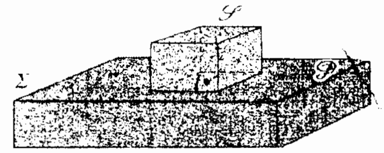
- Các tác động cơ về tiếp xúc giữa hai vật rắn.
- Định luật COULOMB về ma sát rắn.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Động học vật rắn.
- Các định lí cơ bản về động lực của hệ.
- Các khái niệm cơ bản về toocsơ.

1 Nghiên cứu động học

Chúng ta hãy tổng quát hóa một số khái niệm đã đề cập đến ở *chương* 2, chúng tôi đề nghị bạn đọc đọc lại chương đó trước khi tiếp tục theo dõi chương này.

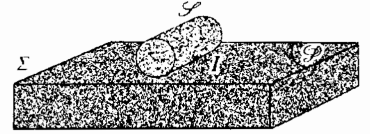


H.1a. *Mặt tiếp xúc giữa hai vật rắn.*

1.1. Vận tốc trượt

Xét hai vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ chuyển động trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ sao cho chúng luôn luôn tiếp xúc nhau; sự tiếp xúc có thể thể hiện :

- bởi một mặt chung (*hình* 1a) ;
- bởi một đường chung (*hình* 1b) ;
- bởi một hay nhiều điểm chung (*hình* 1c).



H.1b. *Đường tiếp xúc giữa hai vật rắn.*

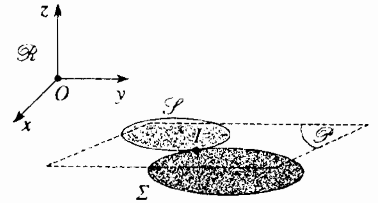
Như vậy tồn tại ít nhất là một điểm $I_{\mathcal{S}}$ của $\mathcal{S}$ trùng hợp với một điểm I_Σ của Σ ở I ở mọi thời điểm t.

Người ta gọi $\vec{v}_g$ là vận tốc trượt của $\mathcal{S}$ trên Σ tại I ở thời điểm t là vectơ (*hình* 2a):

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_{\mathcal{S}})_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_\Sigma)_{/\mathcal{R}}.$$

Vận tốc trượt của $\mathcal{S}$ trên Σ tại I cũng là vận tốc của điểm $I_{\mathcal{S}}$ của $\mathcal{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}_\Sigma$ gắn liền với Σ (*hình* 2b):

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_{\mathcal{S}})_{/\mathcal{R}_\Sigma}$$



H.1c. *Điểm tiếp xúc giữa hai vật rắn.*

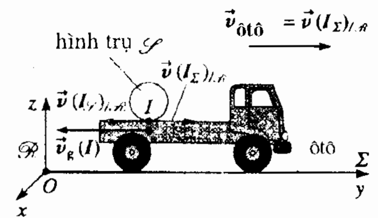
Trong nhiều trường hợp, ta phải nghiên cứu chuyển động của vật rắn $\mathcal{S}$ trên một đế rắn Σ cố định trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}_\Sigma$ lúc đó trùng hợp với $\mathcal{R}$.

Chúng ta giả sử rằng luôn luôn có một mặt tiếp xúc $\mathcal{P}$ chung với $\mathcal{S}$ và với Σ ở mọi điểm I (vậy chúng ta loại trừ, không nghiên cứu, thí dụ về hai hình chóp tiếp xúc nhau ở đỉnh !). Trong trường hợp này, vận tốc trượt $\vec{v}_g$ dĩ nhiên nằm trong mặt $\mathcal{P}$.

Thật vậy, nếu không như thế thì có nghĩa rằng $\mathcal{S}$ lún vào trong Σ (điều này rõ ràng là không thể được !) hay ngược lại, $\mathcal{S}$ rời khỏi Σ (lúc đó không còn tiếp xúc nữa và rất trái với giả thiết của chúng ta).

Người ta nói rằng $\mathcal{S}$ không trượt lên Σ nếu vận tốc trượt bằng không ở mọi điểm tiếp xúc, ở mọi thời điểm :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{0}$$



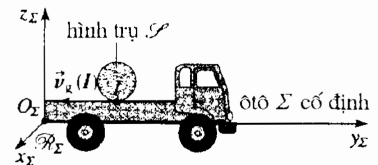
H.2a. *Vận tốc trượt trong* $\mathcal{R}$:

$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_{\mathcal{S}})_{/\mathcal{R}} - \vec{v}(I_\Sigma)_{/\mathcal{R}}$.

<u>*Chú ý :*</u>

Ở điểm tiếp xúc I có hai điểm khác nhau nhưng trùng với nhau : điểm $I_{\mathcal{S}}$ thuộc về $\mathcal{S}$, điểm kia là I_Σ thuộc về Σ.

Trong trường hợp tiếp xúc điểm (hình 1c) hay trong trường hợp tiếp xúc là theo một đường thẳng (thí dụ như trường hợp một hình trụ trên một mặt phẳng (hình 1b)), đôi khi tiện lợi là đưa thêm định nghĩa một điểm thứ ba : điểm tiếp xúc hình học I là điểm tiếp xúc ở mọi thời điểm (điểm này thường xuyên là tiếp xúc với $\mathcal{S}$ và Σ) và ta đã nói về điều này ở chương 2.



H.2b. *Vận tốc trượt trong* R_Σ :

$\vec{v}_g(I) = v(I_{\mathcal{S}})_{/\mathcal{R}_\Sigma}$

1.2. Lăn và quay của $\mathcal{S}$ đối với Σ

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, ta có thể đưa vào các vectơ quay $\vec{\Omega}_{\mathcal{S}}$ và $\vec{\Omega}_\Sigma$ của những vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ. Các tốc độ của một điểm $M_{\mathcal{S}}$ của $\mathcal{S}$ và của một điểm $I_{\mathcal{S}}$ của $\mathcal{S}$ tiếp xúc với Σ ở I liên hệ với nhau bởi :

$$\vec{v}(M_{\mathcal{S}}) = \vec{v}(I_{\mathcal{S}}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{S}} \wedge \overrightarrow{IM}$$

Cũng vậy, các vận tốc của một điểm M_Σ của Σ và của điểm I_Σ của Σ trùng với điểm $I_\mathscr{S}$ của $\mathscr{S}$ ở I, nghiệm đúng:

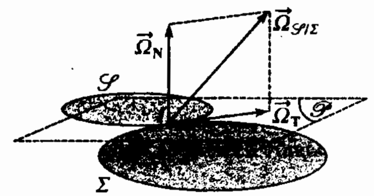
$$\vec{v}(M_\Sigma) = \vec{v}(I_\Sigma) + \vec{\Omega}_\Sigma \wedge \overrightarrow{IM}$$

Vectơ quay tương đối $\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\Sigma}$ của $\mathscr{S}$ đối với Σ, nghĩa là vectơ quay của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_\Sigma$ gắn với Σ:

$$\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\Sigma} = \vec{\Omega}_\mathscr{S} - \vec{\Omega}_\Sigma ,$$

có thể phân tích ra thành tổng của hai vectơ (*hình* 3) :

- **một vectơ $\vec{\Omega}_N$ vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc $\mathscr{S}$ ở I : $\vec{\Omega}_N$ được gọi là vectơ quay của sự xoay;**
- **một vectơ $\vec{\Omega}_T$ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc $\mathscr{S}$ ở I : $\vec{\Omega}_T$ được gọi là vectơ quay của sự lăn.**



H.3. *Phép quay của sự xoay Ω_N và của sự lăn Ω_T của $\mathscr{S}$ trên Σ.*

Ở *hình* 4 chúng ta giả thiết là vật rắn Σ là một đế mà mặt trên phẳng, cố định trong $\mathscr{R}$ và trên đó vật rắn $\mathscr{S}$ dịch chuyển theo cách lăn hoặc (và) xoay; chúng ta đã đặt : $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\mathscr{S} = \vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\Sigma}$

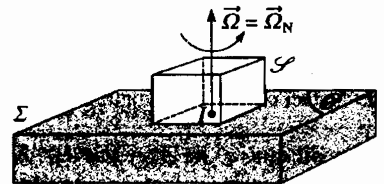
Trong tất cả các áp dụng của sách này, chúng ta chỉ xét các chuyển động đơn giản của vật rắn như là $\mathscr{S}$ trên đế Σ của chúng :

- các vectơ $\vec{\Omega}_N$ và $\vec{\Omega}_T$ có phương không đổi trong quá trình chuyển động;
- $\mathscr{S}$ sẽ lăn không xoay trên Σ, hay $\mathscr{S}$ sẽ xoay không lăn trên Σ, hay $\mathscr{S}$ sẽ chuyển động tịnh tiến trên Σ.

2 Các tác động cơ tiếp xúc

2.1. Mở đầu

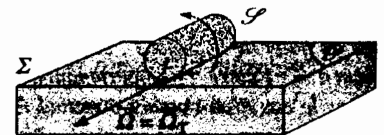
Ngay cả khi ta nói về tiếp xúc điểm giữa hai vật rắn $\mathscr{S}$ và Σ (trường hợp quả cầu trên mặt phẳng), hay tiếp xúc dọc theo một đường (trường hợp hình trụ trên một mặt phẳng), thực tế luôn luôn có một mặt tiếp xúc (có thể mặt đó là rất nhỏ) chung giữa hai vật rắn. Các tác động tiếp xúc là kết quả của tương tác giữa các hạt của $\mathscr{S}$ và của Σ, ở chỗ mặt tiếp xúc này; các tác động này đều có tầm rất ngắn.



H.4a. *Hình lập phương $\mathscr{S}$ xoay trên đế.*

Ở đây chúng ta không nghiên cứu những tương tác vi mô và ta thừa nhận là ở tầm vĩ mô, tác động cơ về tiếp xúc của vật rắn Σ lên vật rắn $\mathscr{S}$ được biểu diễn đầy đủ bởi toocsơ $\mathscr{T}_c$ xác định bởi :

- tổng hợp lực $\vec{R}$ của nó ;
- momen của nó đối với điểm tiếp xúc I : $\overrightarrow{\mathscr{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}}$.



H.4b. *Hình trụ $\mathscr{S}$ lăn trên đế.*

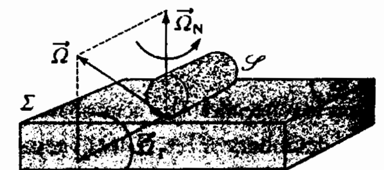
Theo định luật tác động và phản tác động, $\mathscr{S}$ thực hiện lên Σ toocsơ đối lập :

- có tổng hợp $-\vec{R}$;
- có momen đối với I, $-\overrightarrow{\mathscr{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}}$.

Rõ ràng là các tác động cơ tiếp xúc xuất hiện như là các **tác động chưa biết**.

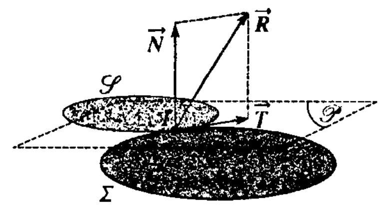
<u>*Chú ý :*</u>

Không thể khác được vì các tác động cơ tiếp xúc là tổng hợp của các tương tác mà ta chưa nghiên cứu và không nghi ngờ gì, chúng làm biến dạng nhẹ ở mặt tiếp xúc của các vật $\mathscr{S}$ và Σ. Nhưng chúng ta giả thiết rằng tất cả các biến dạng đều được bỏ qua vì xem $\mathscr{S}$ và Σ là rắn !



H.4c. *Hình trụ $\mathscr{S}$ lăn và xoay trên đế.*

2.2. Các kiểu ma sát : những giả thiết đơn giản hóa



H.5a. *Tổng hợp lực $\vec{R}$ của các tác động tiếp xúc.*

Xét tác động cơ tiếp xúc ($\vec{R}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}}$) của Σ lên $\mathcal{S}$; ta có thể :

• phân tích tổng hợp lực $\vec{R}$ thành :

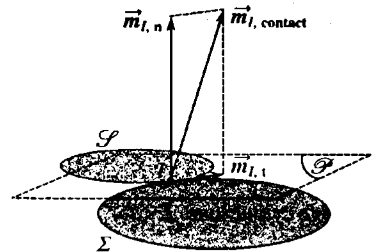
- một thành phần $\vec{T}$ ở I trong mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{P}$ chung của $\mathcal{S}$ và Σ;
- một thành phần $\vec{N}$ ở I theo phương pháp tuyến của $\mathcal{P}$:

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N};$$

• phân tích momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}}$ thành (*hình* 5b) :

- một thành phần $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ t}}$ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{P}$;
- một thành phần $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ n}}$ theo phương của pháp tuyến với $\mathcal{P}$ ở I :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ t}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ n}}.$$



H.5b. *Momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}}$ đối với I của các tác động tiếp xúc.*

$\vec{N}$ có tên là phản lực pháp tuyến

$\vec{T}$ là lực ma sát trượt vì nó chống lại sự trượt của $\mathcal{S}$ trên Σ.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{n}}$ là momen ma sát xoay vì nó chống lại sự xoay của $\mathcal{S}$ trên Σ.

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\text{ t}}$ là momen ma sát lăn vì nó chống lại sự lăn của $\mathcal{S}$ trên Σ.

Khi một hình lập phương xoay trên một đế phẳng (*hình* 6a), mặt tiếp xúc giữa hình lập phương và đế có thể lớn, người ta xem rằng ma sát xoay có thể là đáng kể. Ngược lại, trường hợp quả cầu xoay trên mặt phẳng (*hình* 6b), mặt tiếp xúc rút nhỏ lại thành một điểm, ta có thể nghĩ rằng trong trường hợp này ma sát xoay là nhỏ.

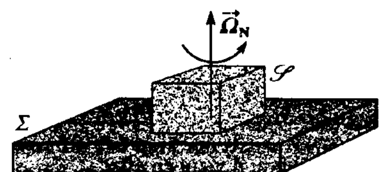
Điều chú ý nói trên đối với momen ma sát xoay cũng có giá trị đối với momen ma sát lăn.

Trong tất cả phần tiếp theo, ta không xét đến ma sát xoay hay ma sát lăn :

• hoặc là vì chúng ta chỉ xét những vật rắn $\mathcal{S}$ tịnh tiến trên đế Σ của chúng và trong phép tịnh tiến không có momen ma sát tham dự;

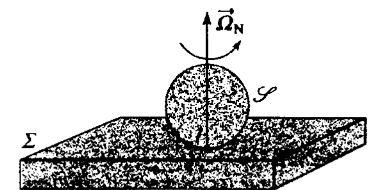
• hoặc là vì chúng ta xét đến vật rắn $\mathcal{S}$, có tiếp xúc điểm I (hoặc có khi tiếp xúc theo đường thẳng trong trường hợp bài toán phẳng : thí dụ một hình trụ lăn trên mặt đất) với đế Σ, và khi đó ta bỏ qua các momen ma sát xoay cũng như lăn.

Trong những trường hợp này, toocsơ của các tác động cơ tiếp xúc của Σ và $\mathcal{S}$ là một glitsơ : các tác động cơ được biểu diễn bởi một lực : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ đi qua I.



H.6a. *Hình lập phương xoay trên mặt phẳng.*

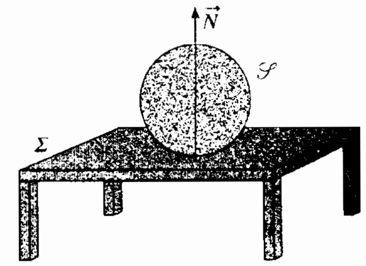
2.3. Các định luật Coulomb về ma sát trượt



H.6b. *Hình cầu xoay trên mặt phẳng.*

Ta đã nói là các tác động cơ tiếp xúc giữa $\mathcal{S}$ và Σ là các tác động chưa biết : như vậy đối với các thông số chưa biết đặc trưng cho chuyển động các vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ phải được thêm vào những đại lượng chưa biết mới là $\vec{N}$ và $\vec{T}$. Những định lí cơ bản bây giờ không cho ta đủ số phương trình để xác định tất cả các biến số và đặc biệt là xác định chuyển động của các vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ.

Phải nhờ đến các định luật "theo hiện tượng" (dựa trên thực nghiệm hoặc những mô hình tính tóan đơn giản) để hoàn chỉnh hệ phương trình : những định luật này có tên là những **định luật COULOMB**.



H.7. *Trường hợp liên kết đơn phương : quả cầu trên bàn.*

2.3.1. Các tính chất của phản lực pháp tuyến $\vec{N}$

Trong trường hợp một liên kết đơn phương (đó là trường hợp vật rắn 𝒮 đặt lên giá Σ) phản lực pháp tuyến của Σ thực hiện lên 𝒮 luôn luôn hướng từ Σ đến 𝒮.

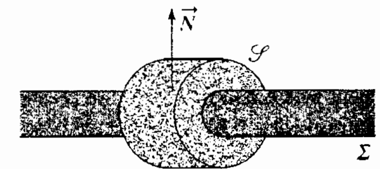
Kể ra thì kết quả này là hiển nhiên : phản lực $\vec{N}$ của bàn Σ ngăn cản vật rắn 𝒮 đi xuyên qua bàn (*h*.7) !

Khi phản lực pháp tuyến triệt tiêu, giữa 𝒮 và Σ không còn tiếp xúc nữa.

Trong trường hợp liên kết song phương (đó là trường hợp một vòng rắn 𝒮 lồng qua một thanh hình trụ Σ (*h*.8), rõ ràng là ta không nói được gì về chiều của $\vec{N}$.

2.3.2. Các tính chất của lực ma sát trượt $\vec{T}$

$\vec{T}$ có các tính chất khác nhau tùy theo 𝒮 trượt hay không trượt trên Σ.



H.8. *Trường hợp liên kết song phương : một cái vòng trên một thanh.*

• **Nếu vận tốc trượt $\vec{v}_g$ của 𝒮 trên Σ khác không (có trượt) : $\vec{T}$ và $\vec{v}_g$ là đồng tuyến và ngược chiều nhau.**

$$\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0} \text{ và } \vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0 .$$

Các môđun của $\vec{T}$ và $\vec{N}$ là tỉ lệ với nhau; nhờ đó người ta định nghĩa một hệ số ma sát trượt f dương theo $\|\vec{T}\| = f\,\|\vec{N}\|$.

• **Nếu tốc độ trượt $\vec{v}_g$ của 𝒮 trên Σ bằng không (không có trượt), các môđun của $\vec{T}$ và $\vec{N}$ thỏa mãn $\|\vec{T}\| \le f\,\|\vec{N}\|$.**

Trong trường hợp không trượt, rõ ràng là chúng ta không còn có thể xem rằng $\vec{T}$ và $\vec{v}_g$ là đồng tuyến và ngược chiều nhau vì $\vec{v}_g$ bằng không. Nhưng không nên nghĩ rằng như thế là ta không biết gì hết về phương của $\vec{T}$.

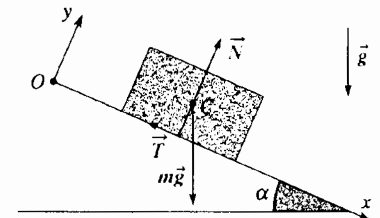
Ví như một hình lập phương nằm yên trên một mặt phẳng nghiêng chịu từ phía mặt phẳng một lực ma sát $\vec{T}$ lực này buộc phải hướng lên trên, nghĩa là theo chiều ngược với chiều trượt của hình lập phương nếu có xảy ra, chiều trượt này chỉ có thể hướng xuống dưới (*h*.9).

Khi cân bằng ta có :

$$\vec{0} = T\,\vec{e}_x + N\,\vec{e}_y + m\vec{g} .$$

Từ đó $T = -mg\sin\alpha < 0$ và $N = mg\cos\alpha > 0$.

Khi f bằng không, tiếp xúc giữa vật rắn 𝒮 và Σ là không ma sát; tổng hợp lực $\vec{R}$ vuông góc với mặt 𝒫 là mặt chung của 𝒮 và Σ.



H.9. *Cân bằng của hình lập phương trên mặt phẳng nghiêng.*

<u>*Chú ý :*</u>

Lưu ý rằng momen ma sát lăn và quay thỏa mãn những định luật cùng kiểu như là các định luật ta vừa đề cập ở trên.

Áp dụng 1

Chuyển động của hình lập phương trên mặt phẳng nghiêng

Một hình lập phương khối lượng m được hất lên với tốc độ ban đầu là v_0 ($v_0 > 0$) theo đường có độ nghiêng lớn nhất của một mặt phẳng nghiêng một góc α so với mặt nằm ngang (hình 9).

Xác định chuyển động của hình lập phương đó (chuyển động này ở đây quy về chuyển động tịnh tiến theo đường thẳng có độ nghiêng lớn nhất (Ox) của mặt nghiêng) theo những giá trị khác nhau của v_0. Cho biết hệ số ma sát trượt giữa hình lập phương và mặt phẳng nghiêng là f.

Kí hiệu $T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ là lực tiếp xúc mặt phẳng - lập phương :

- T là đại lượng đại số, vì lực này đổi chiều tùy theo hình lập phương chuyển động lên hay xuống trên mặt nghiêng.
- N là dương.

Áp dụng định lí về tổng hợp động lực, chiếu lên các trục (Ox) và (Oy) ta được :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha + T \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

Ở giai đoạn đầu, hình lập phương chuyển động lên theo mặt nghiêng và T (dương) có giá trị $T = fN = fmg\cos\alpha$, từ đó :

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

$$\dot{x} = -v_0 + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t$$

$$x = -v_0 t + \frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2$$

(nếu ta chọn $x = 0$ khi $t = 0$).

Tốc độ triệt tiêu ở thời điểm t_0 xác định bởi :

$$t_0 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

Từ thời điểm t_o trở đi, hình lập phương sẽ đứng yên nếu :

$|T| \leq fN$, nghĩa là nếu $\text{tg}\alpha \leq f$.

Trong trường hợp ngược lại ($\tan\alpha > f$), hình lập phương tụt xuống theo mặt phẳng nghiêng với gia tốc :

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Vì $T = -fN = -fmg\cos\alpha$.

Từ đó ta suy ra :

$$x = x(t_0) + \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2.$$

▶ **Để luyện tập : bài tập 2, 3, 4, và 5.**

2.3.2. Các tính chất của hệ số ma sát trượt *f*

Hệ số f này phụ thuộc vào bản chất các vật rắn tiếp xúc, phụ thuộc vào trạng thái các bề mặt tiếp xúc. Hệ số f sẽ lớn nếu các mặt này ráp. Có thể giảm giá trị của f bằng cách cho chất bôi trơn vào giữa hai mặt tiếp xúc. Chúng ta có ở bảng (*h.*10) một số giá trị của f.

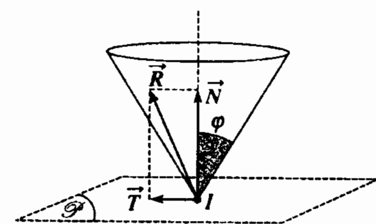
vật tiếp xúc	cỡ giá trị của f
kim loại trên kim loại	0,1 - 0,2
gỗ trên gỗ	0,3 - 0,4
bánh xe trên đường	0,5 - 0,6
thép trên guốc phanh	0, 3 - 0,4

H.10. *Một số giá trị của hệ số ma sát trượt.*

Đôi khi người ta viết $f = \text{tg}\varphi$ nhằm định nghĩa một góc ma sát φ và một hình nón ma sát ở điểm tiếp xúc I giữa hai vật rắn : hình nón ma sát là hình nón tròn xoay có đỉnh là I và góc một nửa ở đỉnh là φ (*h.*11).

Như vậy khi $\mathcal{S}$ trượt trên Σ, phản lực tiếp xúc $\vec{R}$ nằm ở mặt bên của hình nón. Khi $\mathcal{S}$ không trượt trên Σ, $\vec{R}$ nằm ở bên trong và cũng có thể ở mặt bên (trường hợp giới hạn) của hình nón này.

Trong phần lớn bài toán và bài tập thông thường, hệ số f được xem là không đổi và độc lập với vận tốc trượt nhưng xét thật chặt chẽ, điều đó không phải hoàn toàn là đúng : f có một giá trị hơi lớn hơn khi $\mathcal{S}$ không trượt trên Σ.



H.11. *Hình nón ma sát.*

Do đó, có khi người ta định nghĩa :

- hệ số ma sát trượt tĩnh f_s khi không có trượt;
- hệ số ma sát trượt động f_c khi có trượt; chắc chắn là $f_c < f_s$.

Chính là sự khác nhau giữa f_s và f_c cho phép giải thích, thí dụ : rung động của dây đàn violon dưới tác dụng ma sát của cái mã vĩ.

2.4. Một vài hệ quả của định luật COULOMB

2.4.1. Vật rắn cân bằng

Một vật rắn cân bằng trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ giả thiết là Galilé, nếu toocsơ của các ngoại lực tác dụng lên vật rắn là bằng không :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ và } \vec{\mathcal{M}}_{A,\,\text{ext}} = \vec{0}$$

và nếu vật rắn bất động ở thời điểm ban đầu. Hơn nữa, nếu vật rắn chịu các tác động tiếp xúc, những tác động này phải nghiệm đúng các định luật COULOMB (khi cân bằng, chắc chắn là không có trượt !).

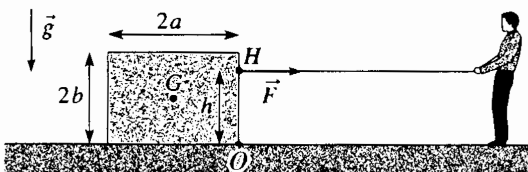
Áp dụng 2

Cân bằng của một vật rắn trên mặt đất

Một vật rắn đồng nhất có khối lượng m, quán tâm G, có dạng hình hộp xiên, các cạnh là 2a và 2b (h.12) nằm yên trên mặt đất nằm ngang. Một người muốn dịch chuyển vật rắn bằng cách dùng dây để kéo (dây buộc ở một điểm H của vật rắn nằm trong mặt trung trực đi qua G và sao cho OH = h) tác dụng lên vật rắn một lực $\vec{F}$ nằm ngang. Tiếp xúc vật rắn với mặt đất được đặc trưng bằng hệ số ma sát f. Người kéo không kéo đủ mạnh và vật rắn vẫn đứng yên.

Chứng minh rằng các tác động cơ tiếp xúc giữa mặt đất và vật rắn được rút gọn lại thành một "lực đơn giản" $\vec{R}$ tác dụng lên một điểm I (của mặt phẳng trung trực) nằm trên mặt tiếp xúc mặt đất – vật rắn (các tác động tiếp xúc này được đặc trưng bằng một glitsơ có tổng hợp là $\vec{R}$ đi qua I).

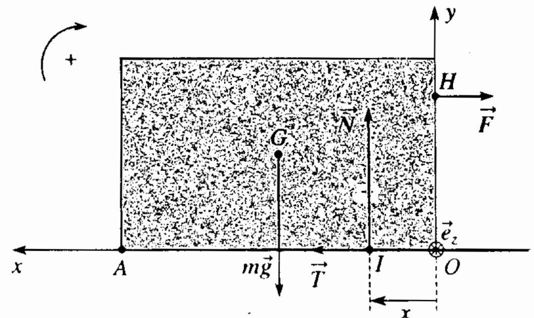
Những điều kiện nào mà cường độ F của lực $\vec{F}$ phải nghiệm đúng để vật rắn thực sự là đứng yên trên mặt đất ?



Vì mặt tiếp xúc giữa đất và vật rắn không phải là đủ nhỏ, các momen ma sát xoay và lăn là không bằng không : các tác động cơ tiếp xúc đất - vật rắn như vậy là phải được đặc trưng bằng toocsơ mà các phần tử rút gọn ở I là :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \text{ và } \vec{\mathcal{M}}_{I,\,\text{tiếp xúc}}.$$

Chúng ta đã trình bày ở *hình* 13 (mặt trung trực của vật rắn) những tổng hợp lực khác nhau của các tác động cơ tác động lên vật rắn này.



H.13. *Tổng hợp các tác động cơ ngoại tác động lên vật rắn.*

H.12. *Một người thử kéo vật rắn.*

Vật rắn đứng yên nếu nó không trượt cũng không lúc lắc quanh cạnh đi qua điểm O.

Khi cân bằng :

• tổng hợp các tác động cơ ngoại tác động lên vật rắn là bằng không, từ đó :

$$N = mg \quad (N > 0)$$

$$T = F \quad (T > 0).$$

Vật rắn không trượt trên mặt đất nếu $T \le fN$, tức là nếu $F \le fmg$;

• momen của các tác động cơ ngoại tác động lên vật rắn bằng không ở tất cả các điểm; ta biểu diễn momen đó ở I :

$$\vec{IG} \wedge m\vec{g} + \vec{IH} \wedge \vec{F} + \vec{IH} \wedge (\vec{T} + \vec{N}) + \vec{\mathcal{M}}_{I,\ \text{tiếp xúc}} = \vec{0}$$

từ đó $\left[(x-a)mg + hF\right]\vec{e}_z + \vec{\mathcal{M}}_{I,\ \text{tiếp xúc}} = \vec{0}$.

Nếu có một điểm I sao cho $(x - a)mg + hF = 0$, tất yếu là có $\vec{\mathcal{M}}_{I,\ \text{tiếp xúc}} = 0$ và các tác động cơ tiếp xúc đất - vật rắn rút lại chỉ còn là một "lực đơn giản" $\vec{R}$ đi qua I.

Ta có thể chú ý rằng phương của $\vec{R}$ đi qua điểm P, giao điểm của phương của $\vec{F}$ và của $m\vec{g}$, và $\operatorname{tg}\alpha = \frac{T}{N} = \frac{F}{mg}$ (*hình* 14).

Ngòai ra điểm I phải nằm giữa O và A, và hoành độ x của điểm I nghiệm đúng :

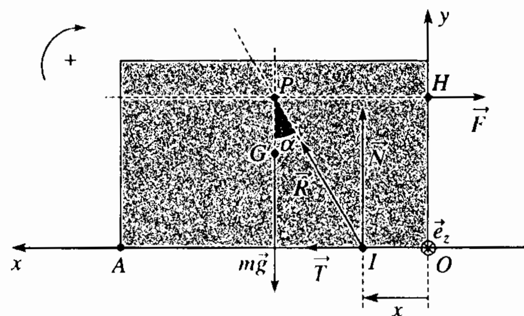
$$0 \le x = a - \frac{F}{mg}h \le 2a$$

Điều kiện thứ hai rõ ràng là luôn luôn thỏa mãn; điều kiện thứ nhất cho ta :

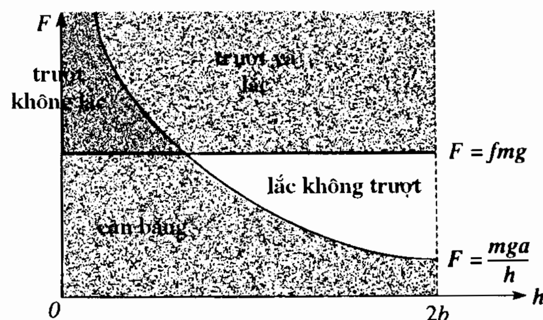
$$F \le mg\frac{a}{h},$$

và khi đó vật rắn không lúc lắc quanh cạnh đi qua O.

Có thể luận ra các điều kiện khác nhau nhờ đồ thị *hình* 15.



H.14.



H.15. *Các điều kiện cân bằng của vật rắn trên mặt đất.*

▶ **Để luyện tập : bài tập 1.**

2.4.2. Hiệu ứng bị kẹt

Ta đặt một vật rắn $\mathcal{S}$ khối lượng m lên trên một cái giá nằm ngang và ta tìm cách làm cho vật trượt bằng cách tác dụng lên vật một lực $\vec{F}$ nghiêng một góc α đối với đường thẳng đứng (trên *hình* 16, điểm đặt của lực $\vec{F}$ được chọn sao cho $\vec{F}$ không thể làm cho vật rắn lúc lắc quanh một cạnh).

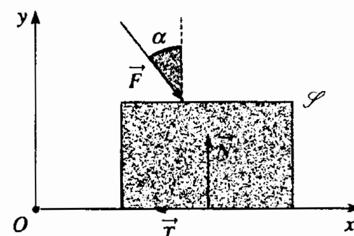
Giả thiết trọng lượng $\mathcal{S}$ là không đáng kể so với cường độ của lực $\vec{F}$, định lí về tổng hợp động lực cho ta :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T + F\sin\alpha \\ 0 = N - F\cos\alpha \end{cases}$$

Các định luật COULOMB cho thấy T và N dương.

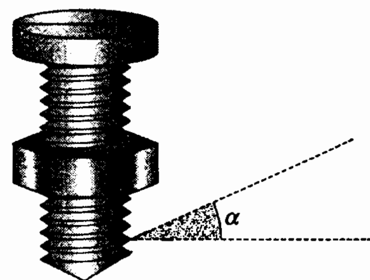
• Nếu $\mathcal{S}$ đứng yên, $(\ddot{x} = 0)$ $T \le fN$, từ đó $\operatorname{tg}\alpha \le f = \operatorname{tg}\varphi$

Điều kiện này không phụ thuộc vào cường độ của lực $\vec{F}$; vậy ta có thể tăng lực này đến bao nhiêu cũng được, tùy sức; nếu α là nhỏ hơn φ, vật rắn



H.16. *Hiệu ứng kẹt.*

có thể bị vỡ ra mà vẫn không trượt : đó là **hiện tượng kẹt**.



H.17. *Hệ êcu–vít.*

• Nếu $\alpha > \varphi$, vật rắn sẽ trượt ngay cả khi lực $\vec{F}$ là rất yếu; gia tốc của vật rắn lúc đó sẽ bằng :

$$\ddot{x} = F(\sin\alpha - f\cos\alpha)\text{, vì } T = fN.$$

Thí dụ :

Chính là hiện tượng kẹt ngăn cản không cho ê cu không tự phát quay quanh cái vít : độ nghiêng α (h.17) của các đường ren xoắn ốc của vít và ê cu chọn khá nhỏ sao cho có được $\operatorname{tg}\alpha \le f$.

2.4.3. Lực ma sát là cần thiết để xe dịch chuyển

Chúng ta ai cũng biết rằng không có động cơ thì xe không chạy được !

Từ đó chúng ta có thể kết luận rằng chỉ có động cơ là nguồn gốc làm cho xe dịch chuyển; nhưng chính mặt đất "đẩy xe" chạy tới, không có ma sát ở mặt đất, xe không thể tiến lên được.

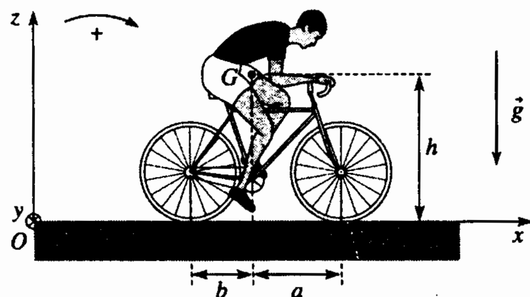
Áp dụng 3 cho phép ta hiểu được kết quả này.

Áp dụng 3

Khởi động của người đi xe đạp

Một người đi xe đạp khởi động trên một con đường nằm ngang : hệ quy chiếu trái đất được xem là galilê. Người đi xe đạp này được xem như một "vật rắn" liên kết với chiếc xe đạp (thực tế ở đây là bỏ qua khối lượng đôi chân chuyển động của người đi xe đạp). Gọi m là khối lượng của người đi xe đạp và cái xe đạp; hai bánh xe đạp là giống nhau có bán kính R, có khối lượng không đáng kể. Khối tâm G của tập hợp được xác định bởi các chiều dài a, b và h (h.18a). Gọi f là hệ số ma sát của các bánh xe với đất (bỏ qua các ma sát khác) và n là tỉ số số răng của đĩa và của líp ở bánh sau.

Momen Γ của ngẫu lực mà người xe đạp phải tác dụng lên đĩa là bao nhiêu để các bánh xe không bị trượt trên mặt đất.



H.18a. *Khởi động của người đi xe đạp.*

Phản lực của đất lên mỗi bánh xe có các thành phần :

$$\vec{R}_k = T_k\vec{e}_x + N_k\vec{e}_z$$

(T_k đại số, $N_k > 0$, $k = 1,2$).

Ta kí hiệu $\dot{x}$ và ω tương ứng là vận tốc của người đi xe đạp và vận tốc quay chung của mỗi bánh xe; điều kiện quay không trượt cho ta : $\dot{x} = R\omega$.

Áp dụng định lí tổng hợp động lực cho cả tập hợp {người đi xe + xe đạp}, chiếu lên (Ox) và (Oz), ta được :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_1 + T_2 \\ 0 = N_1 + N_2 - mg \end{cases}$$

Nếu T_1 và T_2 bằng không (hệ số ma sát f bằng không), người đi xe đạp không khởi động được !

Khi người đi xe đạp tác dụng một ngẫu lực có momen Γ ($\Gamma > 0$!) lên đĩa (lên bàn đạp), một ngẫu lực có mômen là Γ_r tính theo $\Gamma_r = \dfrac{\Gamma}{n}$ tác dụng lên bánh xe sau.

Thực tế, khi không có ma sát, công suất người đi xe sản sinh ra được truyền toàn bộ cho bánh xe, bánh xe quay n lần nhanh hơn là đĩa :

$$\mathcal{P} = \Gamma_r\omega = \Gamma\frac{\omega}{n}.$$

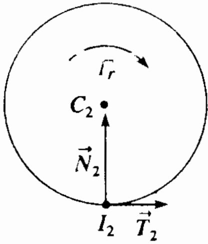
Ta áp dụng cho mỗi bánh xe định lí về momen động lượng đối với tâm bánh xe trong hệ quy chiếu trọng tâm và xét hình chiếu lên (Oy) (ta sẽ thấy ở *chương* 6 là khi không có ma sát, tác động của khung xe lên mỗi bánh xe có momen bằng không đối với trục quay của bánh xe mà ta xét). Ta không quên rằng khối lượng của mỗi bánh xe là không đáng kể, ta có :

• đối với bánh xe sau (*h.*18b) :

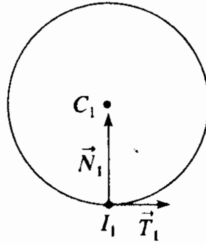
$$0 = -T_2R + \Gamma_r$$

• Đối với bánh xe trước (*hình* 18c) :

$$0 = -T_1R \text{, từ đó } T_1 = 0$$



H.18b. *Bánh sau.*



H.18c. *Bánh trước.*

Chú ý :

Nếu không bỏ qua quán tính của bánh xe trước, T_1 phải là âm.

Dùng các điều kiện lăn không trượt $\dot{x} = R\omega$, ta suy ra :

$$\ddot{x} = \frac{\Gamma_r}{mR} \text{ và } T_2 = \frac{\Gamma_r}{R}.$$

Ta cũng nhận xét là T_2 dương : có nghịch lí, chính là lực ma sát của đất lên xe đạp làm cho xe đạp chạy tới ! Kết quả này rõ ràng là có giá trị đối với mọi xe có động cơ : xe máy (*xem bài toán số* 11) hay xe ô tô.

Các bánh xe không trượt trên đất nếu $|T_k| \le f|N_k|$:

• điều này luôn luôn đúng đối với bánh xe trước vì $T_1 = 0$;

• điều này làm cho đối với bánh xe sau thì $T_2 \le fN_2$.

Để tính N_2, ta vận dụng định lí momen động lượng cho tập hợp {người đi xe đạp + xe đạp}, tại G, trong hệ quy chiếu quán tâm của nó; momen động lượng bằng không, ta có :

$$N_2b - T_2h - N_1a = 0$$

Để ý là $N_1 + N_2 = mg$, từ đó ta suy ra :

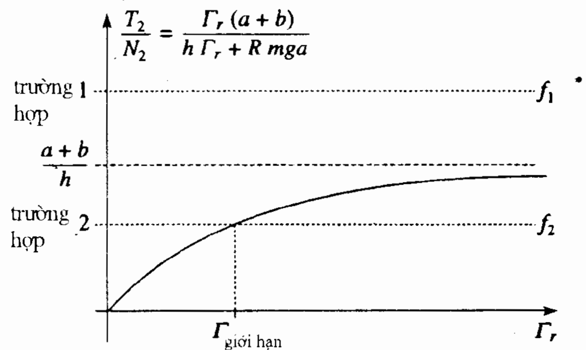
$$N_2 = \frac{1}{a+b}\left(amg + h\frac{\Gamma_r}{R}\right).$$

Biết rằng : $T_2 = \frac{\Gamma_r}{R}$, ta xét tỉ số :

$$\frac{T_2}{N_2} = \frac{\Gamma_r(a+b)}{h\Gamma_r + Rmga}.$$

Γ_r	0 → ∞
$\frac{T_2}{N_2} = \frac{\Gamma_r(a+b)}{h\Gamma_r + Rmga}$	0 → $\frac{a+b}{h}$

$\frac{T_2}{N_2}$ chỉ có thể có các giá trị dương nhỏ hơn $\frac{a+b}{h}$ (*hình* 18d).



H.18d. $\frac{T_2}{N_2}$ *chỉ có thể có các giá trị dương nhỏ hơn* $\frac{a+b}{h}$.

Các đại lượng $\frac{T_2}{N_2}$ phải nhỏ hơn f để người đi xe đạp khởi động không bị trượt, vậy :

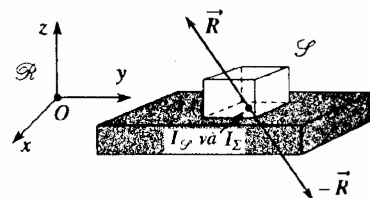
• trường hợp 1 : nếu $f > \frac{a+b}{h}$ (*hình* 18d : $f = f_1$), người đi xe đạp luôn luôn khởi động không bị trượt;

• trường hợp 2 : nếu $f < \frac{a+b}{h}$ (*hình* 18d : $f = f_2$), có một ngẫu lực giới hạn $\Gamma_{\text{giới hạn}}$ tính theo biểu thức sau :

$$\Gamma = n\Gamma_r \le \frac{nRfamg}{a+b-fh} = \Gamma_{\text{giới hạn}}.$$

Như vậy lúc khởi động, khi người đi xe đạp thực hiện một ngẫu lực rất lớn, vượt quá giá trị định nghĩa ở trên, bánh xe sau có xu hướng trượt; điều này hay xảy ra trên mặt đất đóng băng và lốp xe mòn (lúc đó f là rất yếu).

3 Tiếp cận năng lượng



H.19. *Hình lập phương $\mathscr{S}$ tịnh tiến trên đế Σ.*

3.1. Công suất của các tác động cơ tiếp xúc

Ta nhớ lại rằng khi một tác động cơ ngoại, xác định bởi một toocsơ mà các phần tử rút gọn của toocsơ ở điểm A là $(\vec{R}, \vec{\mathscr{M}}_A)$, tác động lên vật rắn $\mathscr{S}$ chuyển động trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}$, công suất của tác động cơ này được biểu diễn theo các ký hiệu thông thường như sau :

$$\mathscr{P} = \vec{R}.\vec{v}(A_{\mathscr{S}}) + \vec{\mathscr{M}}_A \,.\, \vec{\Omega}_{\mathscr{S}}.$$

Ta cũng nhớ lại là biểu thức của công suất này (tích của toocsơ tác động cơ và vận tốc vật rắn) là độc lập với điểm A mà ta tính.

Giả sử có hai vật rắn $\mathscr{S}$ và Σ chuyển động trong $\mathscr{R}$, luôn luôn tiếp xúc với nhau. Chúng ta hãy đánh giá công suất của các tác động tiếp xúc của $\mathscr{S}$ lên Σ và của Σ lên $\mathscr{S}$ trong hai trường hợp đặc biệt.

■ **$\mathscr{S}$ và Σ là tịnh tiến trong $\mathscr{R}$** (*hình* 19)

- $\vec{\Omega}_{\mathscr{S}} = \vec{\Omega}_{\Sigma} = \vec{0}$
- Tất cả các điểm của $\mathscr{S}$ đều có cùng vận tốc ở một thời điểm nhất định.
- Tất cả các điểm của Σ có cùng vận tốc ở một thời điểm nhất định.

Trong biểu thức của công suất chỉ có các lực sau đây :

- $\vec{R}$ của Σ lên $\mathscr{S}$, đó là lực tác dụng lên $\mathscr{S}$ mà công suất là :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{S}} = \vec{R}.\vec{v}(I_{\mathscr{S}})$$

Với ký hiệu $I_{\mathscr{S}}$ là một điểm nào đó gắn liền với $\mathscr{S}$; nói chung thường lấy điểm $I_{\mathscr{S}}$ của $\mathscr{S}$ tiếp xúc với Σ vì $\vec{R}$ là một lực tiếp xúc;

- $-\vec{R}$ của $\mathscr{S}$ lên Σ, là lực tác dụng lên Σ mà công suất là :

$$P_{\Sigma} = -\vec{R}.\vec{v}(I_{\Sigma})$$

với I_{Σ} là một điểm bất kì gắn với Σ; nói chung, chọn điểm I_{Σ} trùng với điểm $I_{\mathscr{S}}$.

■ **$\mathscr{S}$ và Σ tiếp xúc điểm ở I** (hay hãn hữu là tiếp xúc theo đường thẳng trong trường hợp bài toán phẳng : thí dụ một hình trụ lăn trên mặt đất). Lúc đó ta bỏ qua tất cả ma sát xoay và lăn : điều này có nghĩa là momen của các lực tiếp xúc đối với I, tức là $\vec{\mathscr{M}}_{I,\text{ tiếp xúc}}$ là có thể bỏ qua (*h.*20). Lúc đó phải tính công suất của các lực tiếp xúc :

- $\vec{R}$ tại $I_{\mathscr{S}}$ vì $\vec{R}$ tác dụng ở $I_{\mathscr{S}}$;
- $-\vec{R}$ ở I_{Σ} vì $-\vec{R}$ tác dụng ở I_{Σ};

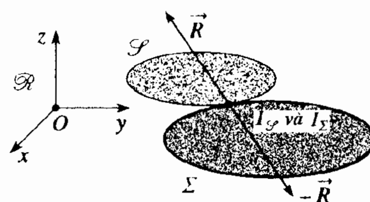
($I_{\mathscr{S}}$ và I_{Σ} là trùng với I ở thời điểm t) :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{S}} = \vec{R}.\vec{v}(I_{\mathscr{S}}) \quad \text{và} \quad \mathscr{P}_{\Sigma} = -\vec{R}.\vec{v}(I_{\Sigma})$$

Chúng ta lại tìm thấy trong hai trường hợp đặc biệt này cùng một biểu thức của các công suất của tác động tiếp xúc. Tổng cộng lại, công suất đó được viết ra như sau :

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathscr{S}} + \mathscr{P}_{\Sigma} = \vec{R}(\vec{v}(I_{\mathscr{S}}) - \vec{v}(I_{\Sigma}))$$

Chúng ta nhận thấy ở đây có vận tốc trượt $\vec{v}_g = \vec{v}(I_{\mathscr{S}}) - \vec{v}(I_{\Sigma})$ của $\mathscr{S}$ trên Σ. Phân tích tác động ra hai thành phần, một thành phần theo pháp tuyến $\vec{N}$ (vuông góc với $\vec{v}_g$) và một thành phần theo tiếp tuyến $\vec{T}$, ta tìm được : $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathscr{S}} + \mathscr{P}_{\Sigma} = \vec{T}.\vec{v}_g \leq 0$.



H.20. *$\mathscr{S}$ có thể lăn và quay trên đế Σ.*

Theo định luật COULOMB ($\vec{T}$ và $\vec{v}_g$ ngược chiều nhau khi có trượt), công suất này chỉ có thể âm hoặc bằng không.

Chú ý :

Các công suất $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ và $\mathcal{P}_{\Sigma}$ có thể dương, âm hay bằng không; chỉ có tổng của chúng là âm hoặc bằng không.

Ở bài tập, ta có thể nghiên cứu riêng chuyển động của $\mathcal{S}$; lúc đó $\vec{R}$ là một lực ngoại, và ta không phải đưa vào $-\vec{R}$ nó không phải thuộc về hệ ta xét.

Cũng vậy, nếu ta nghiên cứu chỉ riêng Σ, $-\vec{R}$ là một lực ngoại và $\vec{R}$ không dự phần vào hệ ta xét.

Ngược lại nếu hệ gồm hai vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ, $\vec{R}$ và $-\vec{R}$ là các lực ngoại và công suất tổng cộng của hai lực này là âm hay bằng không.

Công suất tổng cộng của các lực $\vec{R}$ và $-\vec{R}$ là bằng không : khi tiếp xúc không có ma sát : $\vec{T} = 0$, hay khi không trượt : $\vec{v}_g = 0$.

Điều này cho một kết quả quan trọng vì nếu tất cả các tác động cơ khác tác động lên hệ ($\mathcal{S} + \Sigma$) là dẫn suất từ một thế năng, hoặc là không hoạt động, cơ năng của hệ được bảo toàn trong quá trình chuyển động và ta có thể dùng nguyên hàm của năng lượng để giải quyết bài toán đặt ra.

Áp dụng 4

Thanh chuyển động theo trục cam

Ta xét một cách bố trí để biến chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến tới lui.

Một thanh hình trụ khối lượng m có thể trượt thẳng đứng theo rãnh mà không bị ma sát trong một khung cố định. Chuyển động của thanh được điều khiển bởi một bánh xe bán kính R (R nhỏ hơn bán kính của thanh) có tâm là C và quay với vận tốc ω không đổi quanh một trục nằm ngang lệch tâm cố định, đi qua điểm O của bánh xe và cách tâm C một khoảng là a (h.21).

Điểm O nằm trên đường thẳng đứng theo trục của thanh.

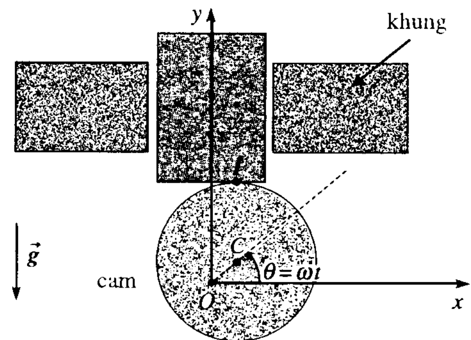
Tiếp xúc giữa bánh xe và thanh có hệ số ma sát là f.

Tính công của lực tiếp xúc giữa đĩa và thanh trong thời gian bánh xe quay một vòng phụ thuộc vào m, ω, R, a, f và độ lớn g của gia tốc trọng trường.

Ta xác định vận tốc $\vec{v}(I_R)$ của điểm I_R của bánh xe tiếp xúc với điểm I_T của thanh ở I; ta có :

$$\overrightarrow{OI}\left|\begin{array}{l} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t + R \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\text{và } \vec{v}(I_R) = \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OI}\left|\begin{array}{l} -\omega\left(a\sin\omega t + R\right) \\ \omega a\cos\omega t \\ 0 \end{array}\right.$$



H.21. *Thanh trên bánh xe lệch tâm.*

Thanh chuyển động tịnh tiến theo chiều thẳng đứng đặc trưng bởi thông số y, đó là tung độ của điểm I; tất cả các điểm của thanh đặc biệt là điểm I_T có cùng tốc độ :

$$\vec{v}(I_T) = \dot{y}\vec{e}_y = a\omega\cos\omega t\,\vec{e}_y .$$

Chúng ta suy ra tốc độ trượt $\vec{v}_g$ của thanh trên bánh xe là :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_T) - \vec{v}(I_R) = \omega(a\sin\omega t + R)\vec{e}_x .$$

Để tính công suất tổng cộng của lực $(T\,\vec{e}_x + N\,\vec{e}_y)$ mà thanh tác dụng lên bánh xe, tức là :

$$\mathcal{P} = \vec{T}.\vec{v}_g .$$

Ta phải xác định T, nghĩa là xác định N vì theo định luật COULOMB $|T| = f|N|$ trong trường hợp trượt.

Muốn vậy, ta vận dụng định lí tổng hợp động lực đối với thanh bằng cách chiếu lên (Oy) (vì không có ma sát giữa khung và thanh, khung không tác dụng một lực thẳng đứng nào lên thanh); ta có $m\ddot{y} = -mg + N$

Từ đó ta có :

$$N = mg + m\ddot{y} = m(g - a\omega^2\sin\omega t) .$$

Ta giả thiết rằng tiếp xúc tồn tại trong toàn bộ chuyển động của vật, điều này dẫn đến $N \geq 0$ và $g \geq a\omega^2$.

Lực ma sát có số đo đại số :

$$T = -|T| = -f\,N = -f\,m(g - a\omega^2\sin\omega t)$$

Vì vận tốc trượt luôn luôn là cùng chiều với trục (Ox).

Cuối cùng công suất $\mathcal{P}$ là :

$$\mathcal{P} = -f\,m\omega(g - a\omega^2\sin\omega t)(a\sin\omega t + R) ,$$

và công đối với một vòng, tức là đối với một chu kì $T(\omega T = 2\pi)$:

$$W = \int_0^T \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t = -\pi\,f\,m(2gR - a^2\omega^2)$$

Ta nghiệm thấy rằng công này đúng là âm (vì $gR \geq a\omega^2 R > a^2\omega^2$).

3.2. Trường hợp đặc biệt vật rắn Σ đứng yên

Ta xét trường hợp hay xảy ra, đó là vật rắn Σ mà ta gọi là cái giá cố định trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ (hay ta ở hệ quy chiếu $\mathcal{R}_\Sigma$ liên kết với giá Σ, cũng vậy).

Trong trường hợp này, lực $-\vec{R}$ của $\mathcal{S}$ tác dụng lên Σ là không làm việc :

$$\vec{v}(I_\Sigma) = \vec{0} ; \quad \mathcal{P}_\Sigma = \vec{0} ;$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P} = \mathcal{P}_\mathcal{S} = \vec{R}\,.\,\vec{v}(I_\mathcal{S}) = \vec{T}.\vec{v}_g \leq 0}$$

Công suất của lực ma sát $\vec{T}$ tác dụng lên $\mathcal{S}$ là âm hay bằng không. Công suất này bằng không khi không có ma sát hay không trượt.

Chú ý :

Khi xét hệ gồm vật rắn $\mathcal{S}$ và cái giá Σ, $\vec{R}$ và $-\vec{R}$ là những lực nội; thế mà ta đã thấy công suất của các lực nội là độc lập với hệ quy chiếu mà ta tính. Rõ ràng là ở đây ta lại tìm thấy kết quả như vậy. Về sau, để đơn giản tính toán trong bài tập mà giá Σ là di động, có thể là tiện lợi khi biểu diễn công suất tổng cộng của các lực tiếp xúc trong hệ quy chiếu gắn liền với giá.

3.3. Từ cơ học đến nhiệt động học

Khi giữa hai vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ tiếp xúc với nhau có ma sát và trượt, công suất tổng cộng $\mathcal{P}$ của các lực tiếp xúc là âm; nếu tất cả các tác động cơ khác tác

động lên hệ ($\mathscr{S} + \Sigma$), là dẫn suất từ một thế năng $\mathscr{E}_P$ hoặc là không làm việc thì cơ năng của hệ bị giảm trong quá trình chuyển động, vì :

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{E}_M) = \frac{d}{dt}(\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P) = \mathscr{P} < 0 .$$

Kinh nghiệm cho ta thấy rằng vùng tiếp xúc bị nóng lên, nhiệt độ tăng lên và ta quen nói rằng cơ năng bị mất mát dưới dạng nhiệt ở vùng tiếp xúc.

Tất cả điều đó là còn mơ hồ và chỉ có nhiệt động học mới cho phép lập luận chặt chẽ hơn. Thật vậy, ở cơ học chúng ta chỉ xét đến động năng vĩ mô của các vật rắn; ở nhiệt động học chúng ta còn xét đến động năng vi mô của các hạt của vật nghiên cứu đặc biệt là để định nghĩa nội năng của những vật này. Khi có ma sát, một phần năng lượng vĩ mô chuyển thành năng lượng chuyển động vi mô : có sự truyền năng lượng nhiệt (hay truyền nhiệt).

Nếu ta kể đến tất cả các năng lượng (vĩ mô, vi mô), nguyên lí thứ nhất của nhiệt động học nói rằng năng lượng tổng cộng của một hệ kín và cô lập được bảo toàn.

Nếu độc giả muốn hiểu sâu hơn, xin đọc cuốn *H–Dự bị, nhiệt động học, năm thứ nhất.*

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ ĐỘNG HỌC TIẾP XÚC

• Người ta gọi là vận tốc trượt $\vec{v}_g$ của $\mathscr{S}$ trên Σ ở I tại thời điểm t là vectơ :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_{\mathscr{S}})_{/\mathscr{R}} - \vec{v}(I_{\Sigma})_{/\mathscr{R}} .$$

Vận tốc trượt của $\mathscr{S}$ trên Σ ở I cũng là vận tốc của điểm $I_{\mathscr{S}}$ của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_{\Sigma}$ gắn với Σ:

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_{\mathscr{S}})_{/\mathscr{R}_{\Sigma}} .$$

Người ta nói rằng $\mathscr{S}$ không trượt trên Σ nếu vận tốc trượt là bằng không ở tất cả các điểm tiếp xúc, tại mọi thời điểm :

$$\vec{v}_g(I) = \vec{0} .$$

• Vectơ quay tương đối $\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\Sigma}$ của $\mathscr{S}$ đối với Σ, nghĩa là vectơ quay của $\mathscr{S}$ trong hệ quy chiếu $\mathscr{R}_{\Sigma}$ gắn liền với Σ:

$$\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\Sigma} = \vec{\Omega}_{\mathscr{S}} - \vec{\Omega}_{\Sigma}$$

có thể phân tích ra thành tổng của hai vectơ :

• vectơ pháp tuyến $\vec{\Omega}_N$ vuông góc với mặt tiếp xúc $\mathscr{P}$ ở I : $\vec{\Omega}_N$ gọi là vectơ quay của chuyển động xoay.

• vectơ $\vec{\Omega}_T$ nằm trong mặt tiếp xúc $\mathscr{P}$ ở I : $\vec{\Omega}_T$ được gọi là vectơ quay của chuyển động lăn.

■ CÁC TÁC ĐỘNG CƠ TIẾP XÚC

Tổng hợp $\vec{R}$ có thể phân tích thành :

• $\vec{N}$ là phản lực pháp tuyến theo phương pháp tuyến với mặt phẳng $\mathscr{P}$ ở I;

• $\vec{T}$ là lực ma sát trượt, nằm trong mặt phẳng $\mathscr{P}$, ngược với chuyển động trượt $\mathscr{S}$ trên Σ.

Momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I, \text{ tiếp xúc}}$ được phân tích ra thành :

• $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\, n}$ là momen ma sát xoay, nằm theo pháp tuyến mặt $\mathscr{S}$, ngược với chuyển động xoay của $\mathscr{S}$ trên Σ;

• $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\, t}$ là momen ma sát lăn, nằm trong mặt phẳng $\mathscr{P}$, ngược với chuyển động lăn của $\mathscr{S}$ trên Σ :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I, \text{ tiếp xúc}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\, t} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,\, n}.$$

Một cách tiên nghiệm, ta sẽ không để ý đến ma sát xoay và ma sát lăn.

• Định luật COULOMB đối với tổng hợp lực

Trong trường hợp liên kết đơn phương (đó là trường hợp vật rắn $\mathscr{S}$ đặt lên một giá Σ), phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ do Σ thực hiện lên $\mathscr{S}$ luôn luôn hướng từ Σ đến $\mathscr{S}$.

• Các tính chất của lực ma sát trượt $\vec{T}$ là khác nhau tùy theo $\mathscr{S}$ có trượt trên Σ hay không.

Nếu vận tốc trượt $\vec{v}_g$ của $\mathscr{S}$ trên Σ khác không (có trượt) :

$\vec{T}$ và $\vec{v}_g$ là đồng tuyến và trái chiều : $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$ và $\vec{T} \,.\, \vec{v}_g < 0$.

Các môđun của $\vec{T}$ và của $\vec{N}$ là tỉ lệ; từ đó người ta định nghĩa hệ số ma sát trượt f dương bởi $\|\vec{T}\| = f\|N\|$.

Nếu vận tốc trượt $\vec{v}_g$ của $\mathscr{S}$ trên Σ là bằng không (không có trượt) : các môđun của $\vec{T}$ và $\vec{N}$ thỏa mãn $\|\vec{T}\| \le f\|\vec{N}\|$.

■ CÔNG SUẤT CỦA CÁC TÁC ĐỘNG CƠ TIẾP XÚC

• Công suất của tổng hợp $\vec{R}$ mà Σ tác dụng lên $\mathscr{S}$ là $\mathscr{P}_{\mathscr{S}} = \vec{R}.\vec{v}_g(I_{\mathscr{S}})$;

công suất của tổng hợp $-\vec{R}$ mà $\mathscr{S}$ tác dụng lên Σ là $\mathscr{P}_{\Sigma} = -\vec{R}.\vec{v}(I_{\Sigma})$.

Công suất tổng cộng của các tác động tiếp xúc là :

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathscr{S}} + \mathscr{P}_{\Sigma} = \vec{T}.(\vec{v}(I_{\mathscr{S}}) - \vec{v}(I_{\Sigma})) = \vec{T}.\vec{v}_g \le 0.$$

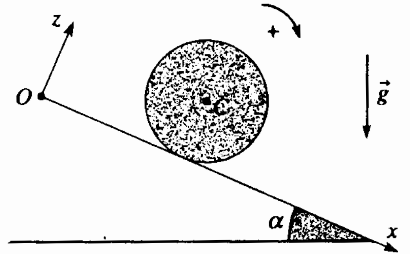
• Công suất tổng cộng các lực tiếp xúc $\vec{R}$ và $-\vec{R}$ bằng không : khi tiếp xúc không ma sát : $\vec{T} = \vec{0}$, hay khi không trượt : $\vec{v}_g = \vec{0}$.

• Trong trường hợp đặc biệt hay xảy ra khi mà "giá" Σ là đứng yên trong $\mathscr{R}$, lực $-\vec{R}$ của $\mathscr{S}$ lên Σ không làm việc $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\mathscr{S}} = \vec{T}.\vec{v}(I_{\mathscr{S}}) = \vec{T}.\vec{v}_g \le 0$.

Bài tập có giải

I. Hình trụ trên mặt phẳng nghiêng

ĐỀ



Một hình trụ đồng nhất có quán tâm C bán kính R và momen quán tính $J = \frac{1}{2}mR^2$ đối với trục của nó, được đặt không có vận tốc đầu trên một mặt phẳng nghiêng một góc α so với đường nằm ngang, trong hệ quy chiếu trái đất $\mathscr{R}$ xem là Galilé (trục hình trụ là nằm ngang).

Ta ký hiệu f là hệ số ma sát trượt giữa hình trụ và mặt phẳng nghiêng.

1) Xác định gia tốc $\ddot{x}$ của hình trụ. Chứng tỏ rằng có trượt hay không là tùy theo giá trị của α so với một giá trị α_0 nào đó mà ta cần xác định.

2) Tìm tổng cộng năng lượng giữa các thời điểm 0 và t. Xét đến hai trường hợp $\alpha < \alpha_0$ và $\alpha > \alpha_0$.

LỜI KHUYÊN

Bài tập này thích hợp cho một phương pháp giải hoàn toàn cổ điển.

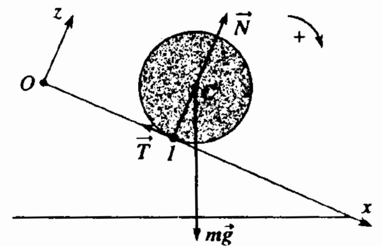
Khi ta biết chắc chắn chiều của lực ma sát ta có thể viết số đo đại số của lực đó dưới dạng $\pm T$ với T dương và dấu thích hợp.

Khi ta không biết chiều của lực ma sát (chiều này có thể thay đổi trong quá trình chuyển động : điều này, xảy ra thí dụ ở bài tập này khi ban đầu cho hình trụ chạy lên cao) ta viết số đo đại số T có thể dương hay âm. Khi đó không nên quên rằng phải lấy môđun T khi dùng các định luật :

$$|T| = f|N| \text{ hay } |T| \le f|N|.$$

Ngoài ra, chuyển động của hình trụ được xác định bởi hoành độ x của khối tâm C của nó và bởi góc θ đặc trưng cho chuyển động quay của hình trụ quanh trục (Cy) đi qua C và đồng tuyến với (Oy) trong hệ quy chiếu quán tâm $\mathscr{R}^*$ của nó; tốc độ quay của hình trụ trong $\mathscr{R}$ và trong $\mathscr{R}^*$ là như nhau và bằng $\dot{\theta}e_y$.

LỜI GIẢI



1) Hình trụ chịu tác dụng của trọng lượng $m\vec{g}$ của nó và phản lực của mặt phẳng nghiêng, ta có thể viết :

$$-T\,\vec{e}_x + N\,\vec{e}_z$$

suy từ các định luật COULOMB; N rõ ràng là dương và T cũng thế (thật vậy, nếu hình trụ trượt, nó sẽ trượt xuống).

Ta vận dụng cho hình trụ :

• định lí về tổng hợp động lực, trong hệ quy chiếu trái đất, chiếu lên các trục (Ox) và (Oz) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

• định lí về momen động lượng tại C, trong hệ quy chiếu trọng tâm $\mathscr{R}^*$ của nó, chiếu lên trục (Oy) :

$$J\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = TR$$

Ta biểu diễn vận tốc trượt của hình trụ trên mặt phẳng nghiêng :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_{\text{hình trụ}}) = \vec{v}(C) + \dot{\theta}\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{CI}, \text{ hay } \vec{v}_g = \dot{x} + R\dot{\theta}.$$

Bây giờ ta hình dung hai trường hợp chuyển động có thể xảy ra :

Trường hợp 1 : hình trụ lăn không trượt.

$$v_g = 0 \text{ và } \ddot{x} = R\ddot{\theta}.$$

Khử T và $\ddot{\theta}$ trong các phương trình trước, ta có :

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

x, θ, N và T là bốn ẩn số của bài toán này. Vậy ta phải viết bốn phương trình; ba phương trình sẽ có được từ các định lí cơ bản; các định luật Coulomb cho phép ta tìm phương trình cuối nhưng ta phải xem xét hai trường hợp : trường hợp hình trụ lăn mà không trượt và hình trụ trượt khi lăn.

Chú ý : bài tính chưa kết thúc, ta phải nghiệm lại giá trị của giả thiết đặt ra về lăn không trượt, theo định luật Coulomb thì $|T| \le f|N|$.

Ta có $T = \frac{1}{3} g \sin\alpha$ và N = mgcosα, từ đó

$$\text{tg}\alpha \le \text{tg}\alpha_0 = 3f .$$

Hình trụ như vậy là lăn không không trượt nếu độ nghiêng của mặt phẳng nghiêng là nhỏ hơn hoặc bằng α_0.

Trường hợp 2 : Nếu $\alpha > \alpha_0$ hình trụ trượt khi lăn.

$$v_g \neq 0$$

Trong trường hợp này $T = |T| = fN = fmg\cos\alpha$ dẫn đến :

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \text{ và } \ddot{\theta} = 2\frac{fg\cos\alpha}{R} .$$

2) Biến thiên động năng của hình trụ giữa các thời điểm 0 và t là :

$$\mathscr{E}_K(t) - \mathscr{E}_K(0) = \mathscr{E}_K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

và bằng công của trọng lượng và lực tiếp xúc :

$$W = mgx\sin\alpha - \int_0^t \vec{R}.\vec{v}(I_{\text{hình trụ}})\text{d}t = mgx\sin\alpha - \int_0^t Tv_g \text{d}t .$$

• Khi $\alpha < \alpha_0$, $v_g = 0$, lực ma sát không làm việc và ta có :

$$\frac{3}{4}m\dot{x}^2 = mg\dot{x}\sin\alpha .$$

Lấy đạo hàm hệ thức này ta tìm được gia tốc của hình trụ :

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\alpha .$$

• Khi $\alpha > \alpha_0$, $v_g = \dot{x} - R\dot{\theta} = g(\sin\alpha - 3f\cos\alpha)t$, và ta có thể nghiệm thấy rằng :

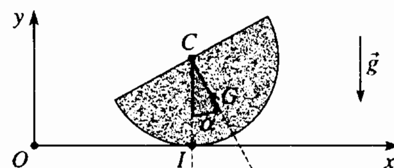
$$\mathscr{E}_K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mgx\sin\alpha - \int_0^t fmg^2\cos\alpha\left(\sin\alpha - 3f\cos\alpha\right)t\,\text{d}t$$

bằng cách thay x, $\dot{x}$ và θ bởi các giá trị của chúng.

2. Vật hình nửa đĩa lăn không trượt trên một mặt phẳng

ĐỀ BÀI

Ta xét một vật hình nửa đĩa $\mathcal{D}$ đồng nhất, tâm C khối tâm là G, bán kính R và khối lượng m. Hệ quy chiếu trái đất $(O;\ x,\ y,\ z)$ được xem là Galilé. Tất cả đều nằm trong mặt thẳng đứng (Oxy), $\mathcal{D}$ lăn không trượt trên mặt nằm ngang (Oxz) và ta kí hiệu T là điểm tiếp xúc giữa mặt đất và $\mathcal{D}$.



Ta xác định vị trí của $\mathcal{D}$ theo tọa độ x của tâm C của nó và theo góc $\alpha = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CG})$. Cho $CG = b = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Momen quán tính của $\mathcal{D}$ đối với trục qua C và vuông góc với $\mathcal{D}$ là $J = \dfrac{1}{2}mR^2$.

Hãy xác định phương trình chuyển động của $\mathcal{D}$ theo nhiều phương pháp khác nhau.

1) Các hệ thức động học

a) Thiết lập hệ thức giữa $\dot{x}$ và $\dot{\alpha}$ biểu diễn chuyển động lăn không trượt.

b) Biểu diễn các thành phần vận tốc và gia tốc của khối tâm G theo b, theo α và các đạo hàm của chúng.

2) Phương pháp thứ nhất : phương pháp năng lượng

a) Tính động năng $\mathcal{E}_K$ của $\mathcal{D}$ theo J, m, b và $\dot{\alpha}$

b) Tính thế năng trong trọng trường của $\mathcal{D}$.

c) Suy ra một nguyên hàm của chuyển động; sau đó thiết lập phương trình vi phân bậc hai thỏa mãn đối với α (đưa vào các thông số J, R, b và m).

3) Phương pháp thứ hai "cổ điển"

a) Viết định lí tổng hợp động lực

b) Viết định lí momen động lực đối với G, trong hệ quy chiếu trọng tâm của $\mathcal{D}$.

c) Suy ra phương trình vi phân bậc hai của α.

3) Phương pháp thứ ba (dùng thận trọng)

a) Tính momen động lực của đĩa $\mathcal{D}$ đối với I.

b) Vận dụng định lí momen động lực đối với I để tìm lại phương trình vi phân bậc hai của α.

5) Giả sử rằng α thật nhỏ. Tuyến tính hóa phương trình đã có được và suy ra chu kì T_0 của các dao động nhỏ của $\mathcal{D}$ quanh vị trí cân bằng. Trước hết biểu diễn T_0 theo hàm của J, R, b và m và của cường độ của trọng trường g, sau đó tính chỉ theo hàm của R và g.

LỜI KHUYÊN

Đối với loại bài tập này, rõ ràng là phương pháp dùng bảo toàn cơ năng là gọn và đơn giản nhất.

Phương pháp thứ hai hơi nặng về tính toán và phương pháp thứ ba là

LỜI GIẢI

1. Các hệ thức động học

a) Vì là lăn không trượt vận tốc điểm I của $\mathcal{D}$ bằng không; như vậy $\vec{v}(I_{\text{đĩa}}) = \vec{0} = \vec{v}(C) + \dot{\alpha}\,\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{CI}$ dẫn đến $\dot{x} + R\dot{\alpha} = 0$

b) Khối tâm G có các thành phần : $\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x + b\sin\alpha \\ R - b\cos\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

hay nếu ta trực tiếp tính momen động lực của vật rắn ở điểm tiếp xúc I khi dùng định lí KŒNIG đối với momen động lực (trước hết ta phải tránh lấy đạo hàm của momen động lượng của vật rắn đối với I, điểm tiếp xúc hình học của hai vật rắn, vì có nguy cơ quên các số hạng).

Chú ý : ta phải áp dụng hai lần định lí HUYGENS.

Lấy đạo hàm ta được :

• vận tốc $\vec{v}(G)\left|\begin{array}{l}\dot{x}+b\cos\alpha\dot{\alpha}=(-R+b\cos\alpha)\dot{\alpha}\\ b\sin\alpha\dot{\alpha}\\ 0\end{array}\right.$

• gia tốc $\vec{a}(G)\left|\begin{array}{l}(-R+b\cos\alpha)\ddot{\alpha}-b\sin\alpha\dot{\alpha}^2\\ b\sin\alpha\ddot{\alpha}+b\cos\dot{\alpha}^2\\ 0\end{array}\right.$

2) Phương pháp năng lượng

a) Động năng của $\mathscr{D}$ có thể tính từ định lí KŒNIG :

$\mathscr{E}_K=\frac{1}{2}mv(G)^2+\frac{1}{2}J_G\dot{\alpha}^2$, hay xuất phát từ $\mathscr{E}_K=\frac{1}{2}J_I\dot{\alpha}^2$, vì điểm I của đĩa có vận tốc bằng không.

Định lí HUYGENS cho phép tính các momen quán tính của $\mathscr{D}$ đối với một trục song song với (Oz) và :

• đi qua G : $J_G=J-mb^2$;

• đi qua I : $J_I=J_G+mGI^2=J_G+m(R^2+b^2-2Rb\cos\alpha)$.

Trong cả hai trường hợp, ta tìm được :

$$\mathscr{E}_K=\frac{1}{2}(J+mR^2-2Rb\cos\alpha)\dot{\alpha}^2 .$$

b) Thế năng $\mathscr{E}_P$ bằng :

$$\mathscr{E}_P=-m\vec{g}.\overrightarrow{OG}(+\text{cte})\text{, vậy }\mathscr{E}_P=-mg(R-b\cos\alpha)+\text{cte} .$$

c) Vì lăn mà không trượt, lực tiếp xúc giữa mặt đất và $\mathscr{D}$ không làm việc, cơ năng của đĩa được bảo toàn trong quá trình chuyển động :

$$\mathscr{E}_M=\mathscr{E}_K+\mathscr{E}_P=\text{cte} .$$

Như vậy ta có được nguyên hàm của năng lượng :

$$\frac{1}{2}(J+mR^2-2mRb\cos\alpha)\dot{\alpha}^2+mg(R-b\cos\alpha)=\text{cte} .$$

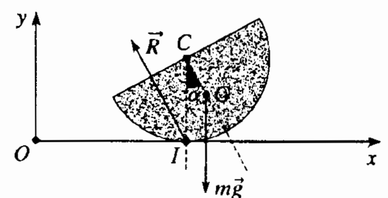
Sau đó lấy đạo hàm :

$$(J+mR^2-2mRb\cos\alpha)\ddot{\alpha}+mRb\sin\alpha\dot{\alpha}^2+mgb\sin\alpha=0 .$$

3) Phương pháp "cổ điển"

a) Định lí tổng hợp động lực khi thực hiện chiếu lên các trục (Ox) và (Oy) cho ta :

$$\left|\begin{array}{l}m(-R+b\cos\alpha)\ddot{\alpha}-mb\sin\alpha\dot{\alpha}^2=T\\ m(b\sin\alpha\ddot{\alpha}+b\cos\alpha\dot{\alpha}^2)=N-mg\end{array}\right. ,$$



Với kí hiệu T và N là các thành phần của phản lực $\vec{R}$ của mặt đất lên $\mathscr{D}$.

b) Định lí momen động lực đối với G, trong hệ quy chiếu trọng tâm của đĩa, thực hiện chiếu lên (Oz), cho ta :

$$J_G\ddot{\alpha}=(J-mb^2)\ddot{\alpha}=(\overrightarrow{GI}\wedge\vec{R}).\vec{e}_z=-b\sin\alpha N+(R-b\cos\alpha)T .$$

c) Khử T và N trong ba phương trình trên tất nhiên là ta tìm lại được phương trình vi phân ở câu hỏi **2) c**).

4) Phương pháp thứ ba

a) Ta có thể tính momen động lực của $\mathscr{D}$ ở I.

• Hoặc là dùng định lí KŒNIG :

$$\vec{D}_I = \overrightarrow{IG} \wedge m\vec{a}(G) + J_G \ddot{\alpha}\vec{e}_z,$$

ta tìm được $\vec{D}_I = \left[\left(J + mR^2 - 2Rb\cos\alpha\right)\ddot{\alpha} + mRb\sin\alpha\dot{\alpha}^2\right]\vec{e}_z$.

• Hoặc là dùng cách biểu diễn momen động lượng của D đối với I nhờ định lí KŒNIG :

Như chúng ta đã lưu ý, cách tính thứ hai này cực kì là tế nhị, lời khuyên là không nên theo cách này.

$$\vec{L}_I = \overrightarrow{IG} \wedge m\vec{v}(G) + J_G\dot{\alpha}\vec{e}_z = [J + m(R^2 - 2Rb\cos\alpha)]\dot{\alpha}\vec{e}_z,$$

hay là bởi $\vec{L}_I = J_I\dot{\alpha}\vec{e}_z = [J + m(R^2 - 2Rb\cos\alpha)]\dot{\alpha}\vec{e}_z$

và dùng hệ thức :

$$\vec{D}_I = \frac{d\vec{L}_I}{dt} m\vec{v}(I) \wedge \vec{v}(G) = \frac{d}{dt}(J_I(\alpha)\dot{\alpha})\vec{e}_z + m\vec{v}(I_{\text{hình học}}) \wedge \vec{v}(G)$$

Ta suy ra từ đây, theo cách **hình học**, momen động lượng $\vec{L}_I$:

• phép tính được thực hiện xuất phát từ điểm hình học I mà vận tốc bằng vận tốc của C :

$$\vec{v}(I_{\text{hình học}}) = \vec{v}(C) = -R\dot{\alpha}\vec{e}_z;$$

• chúng ta cũng phải lấy đạo hàm $J_I(\alpha)$ phụ thuộc vào α.

Rõ ràng là ta tìm lại được cùng một biểu thức của $\vec{D}_I$.

b) Vận dụng định lí về momen động lực ở I, phép chiếu lên trục (Oz) cho ngay kết quả (chỉ có momen của trọng lượng đối với I là khác không) :

$$(J + mR^2 - 2mRb\cos\alpha)\ddot{\alpha} + mRb\sin\alpha\dot{\alpha}^2 - mgb\sin\alpha.$$

5) Nếu α là nhỏ, phương trình trên được đơn giản thành :

$$(J + mR^2 - 2mRb)\ddot{\alpha} = -mgb\alpha$$

Vật hình nửa đĩa $\mathscr{D}$ thực hiện những dao động nhỏ hình sin quanh vị trí $\alpha = 0$ với chu kì :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J + mR^2 - 2mRb}{mgb}},$$

Thay J và b bởi các giá trị của chúng, chu kì này cũng có thể viết thành :

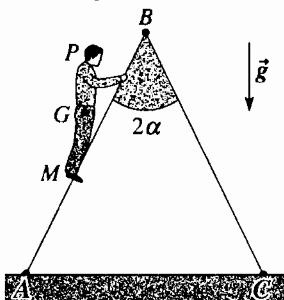
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(9\pi - 16)R}{8g}}$$

Bài tập

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP GIÁO TRÌNH

1 Cân bằng của một cái thang trên mặt đất

Một cái thang đôi gồm hai nửa để leo AB và BC giống nhau, khối lượng không đáng kể, chiều dài b, góc giữa chúng là 2α, đứng yên trên mặt đất nằm ngang.



Khớp nối giữa hai nửa để leo lên được xem là không có ma sát; tiếp xúc giữa mặt đất và các chân A và C của thang có cùng hệ số ma sát f.

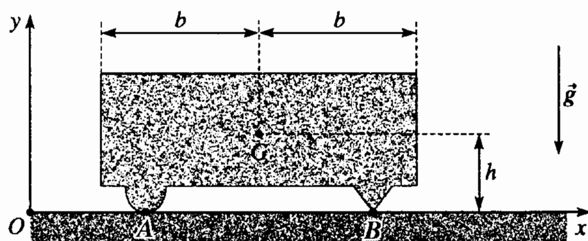
Một người khối lượng m có thể dùng thang này mà không bị nguy hiểm không ? (Người được xem như một đoạn thẳng đứng MP với quán tâm G : ta sẽ đặt $x = AM$).

2 Vật rắn tịnh tiến trên mặt đất

Trong một hệ quy chiếu galilé $(O\ ;\ x,\ y,\ z)$, người ta xét vật rắn như vẽ ở sơ đồ (khối lượng m, quán tâm G), nằm trên mặt đất nằm ngang (Oxz) ở A và B.

Tiếp xúc ở B xem như không có ma sát còn ở A có ma sát với hệ số ma sát là f. Ở thời điểm đầu, người ta đẩy vật rắn với vận tốc đầu là v_0 (song song và theo chiều Ox).

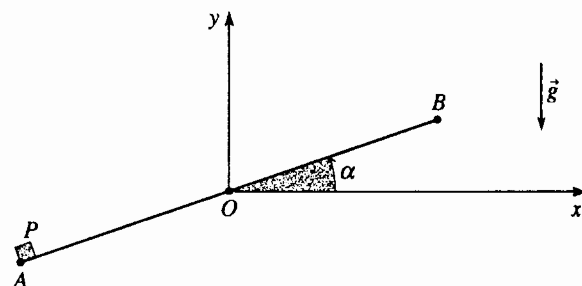
Xác định khoảng cách d mà vật rắn chạy được cho đến lúc dừng lại.



3 Chất điểm trên một thanh quay

$(O;\ x,\ y,\ z)$ là một hệ quy chiếu galilé. Một thanh đồng nhất AOB khối lượng M chiều dài $2a$, chuyển động không ma sát quanh trục (Oz) thẳng đứng.

Momen quán tính của thanh đối với trục (Oz) là $J = \frac{1}{3}Ma^2$.



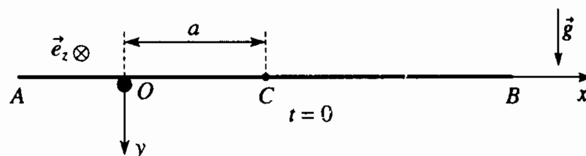
Người ta đặt lên đầu mút A của thanh một chất điểm P có khối lượng m. Tiếp xúc giữa P và thanh có hệ số ma sát trượt là f.

Người ta buông toàn bộ {thanh + chất điểm} không vận tốc đầu, ở vị trí nằm ngang $\alpha = 0$.

Ở những điều kiện nào P vẫn còn ở trên thanh ?

4 Chuyển động của một thanh trên một trục nằm ngang

$(O;\ x,\ y,\ z)$ là một hệ quy chiếu galilé. Một thanh đồng nhất AB có khối lượng m, chiều dài $2b$, tâm C, momen quán tính $J = \frac{1}{3}mb^2$ so với trục đi qua C và vuông góc với thanh, được đặt trên một trục có bán kính không đáng kể trùng với (Oz). Tiếp xúc giữa thanh ngang và trục được đặc trưng bởi hệ số ma sát trượt f. Ở thời điểm đầu, người ta buông thanh ra ở vị trí nằm ngang, không có vận tốc đầu (lúc đó thanh trùng với trục (Ox)) sao cho $OC = a$ với $0 < a < b$.



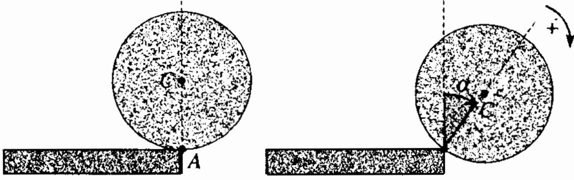
Ở độ nghiêng θ_0 nào thanh bắt đầu trượt trên trục (Oz) ?

5 Sự rơi của đồ chơi hình trụ

Hệ quy chiếu trái đất xem như là hệ galilé. Ở thời điểm ban đầu, một đồ chơi hình trụ đồng nhất (khối lượng m, bán kính R, momen quán tính đối với trục $J = \frac{1}{2}mR^2$) nằm ở cạnh A của một cái giá (cạnh của giá này song song với đường sinh của đồ chơi hình trụ).

Dưới ảnh hưởng của vận tốc ban đầu, không đáng kể, đồ chơi hình trụ rơi xuống.

Trên sơ đồ ta vẽ đồ chơi hình trụ lúc ban đầu, rồi ở một thời điểm nào đó về sau.



Ta kí hiệu f là hệ số ma sát trượt giữa đồ chơi hình trụ và cái giá.
Ở độ nghiêng α_0 nào đồ chơi bắt đầu trượt trên cạnh A của giá trước khi rơi khỏi giá ?
Áp dụng số với $f = 0,2$.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

6 Lăn và trượt của một hình trụ trên mặt đất nằm ngang

Ta xét một hình trụ $\mathscr{C}$ đồng nhất, có quán tâm G, khối lượng m, bán kính a và momen quán tính $J = \frac{1}{2}ma^2$ đối với trục của nó.

Đối với các áp dụng số, ta lấy $m = 2$kg, $a = 5$cm.

Gia tốc trọng trường là $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

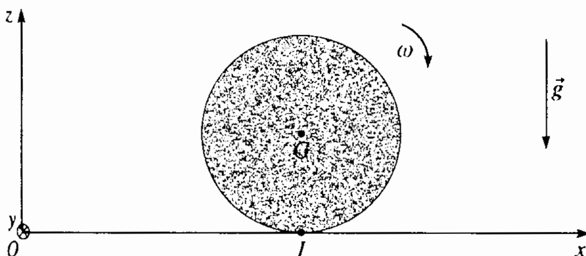
Hệ quy chiếu trái đất $(O; x, y, z)$ được giả thiết là hệ Galilé, trục (Oz) thẳng đứng và hướng lên trên.

Hình trụ $\mathscr{C}$ quay quanh trục của nó với vận tốc góc $\omega_0 = \omega_0 \vec{e}_y$ ($\vec{e}_y$ là vectơ đơn vị của trục (Oy), $\omega_0 > 0$); cho biết $\omega_0 = 60 \text{ rad.s}^{-1}$.

Ở thời điểm $t = 0$ hình trụ nằm trên mặt nằm ngang cố định (xOy). Quán tâm G ban đầu đứng yên đối với mặt này.

Ta gọi f là hệ số ma sát trượt của hình trụ trên mặt (xOy).

Kí hiệu $\vec{R}$ là phản lực của mặt này lên C và kí hiệu N và T là các thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến của phản lực đó.



1) Vận dụng các hệ thức cơ bản của động lực học, xác định ở thời điểm t, các số đo đại số của vận tốc $\dot{x}$ của quán tâm C, của vận tốc góc ω và vận tốc trượt v_g của quán tâm khi có trượt.

2) Ở thời điểm t_1 nào thì hết trượt ? Xác định các giá trị $\dot{x}_1$ và ω_1 của $\dot{x}$ và ω ở thời điểm này cũng như khoảng cách x_1 đi được.

Tính các trị số t_1, $\dot{x}_1$, ω_1 và x_1 khi $f = 0,1$.

3) Xác định công W trong khoảng $t = 0$ và $t = t_1$ của phản lực $\vec{R}$ ban đầu theo cách trực tiếp, sau vận dụng định lí động năng. Tính W.

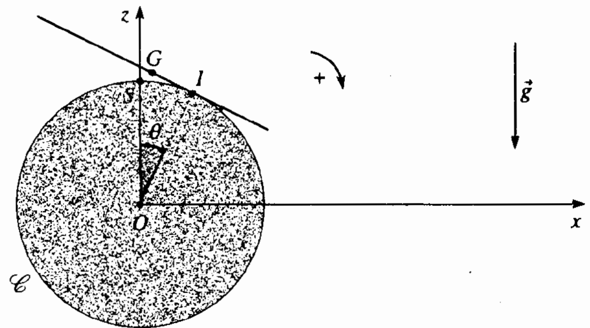
4) Chuyển động của $\mathscr{C}$ sau t_1 là thế nào ? Biện luận và vẽ các đường cong biểu diễn biến thiên của $\dot{x}$ và ω theo thời gian.

7 Dao động của một thanh trên một hình trụ

Ta đang ở trong hệ quy chiếu trái đất Galilé; trọng trường có độ lớn là g.

Một thanh đồng nhất tiết diện không đáng kể, khối lượng m, quán tâm G, chiều dài $2a$, momen quán tính $J = \frac{1}{3}ma^2$ đối với trục đi qua G và vuông góc với thanh. Thanh được đặt nằm ngang ở đỉnh S của một hình trụ $\mathscr{C}$ đứng yên và bán kính là b; G trùng với S.

Sau đó thanh được dịch một góc θ_0, vẫn luôn giữ cho tiếp xúc với $\mathscr{C}$ khi chuyển động không trượt, sau đó được thả ra không có tốc độ đầu. Cần nghiên cứu dao động không trượt của thanh trên $\mathscr{C}$.



1) Tìm biểu thức của động năng của thanh ở một thời điểm t bất kì nào đó.

2) Tìm phương trình vi phân cho phép biết được chuyển động của thanh.

3) Xét trường hợp dao động nhỏ ($\theta_0 \ll 1$ rad).

a) Đơn giản hóa phương trình có được ở câu hỏi 2).

b) Tính chu kì T_0 của các dao động nhỏ của thanh.

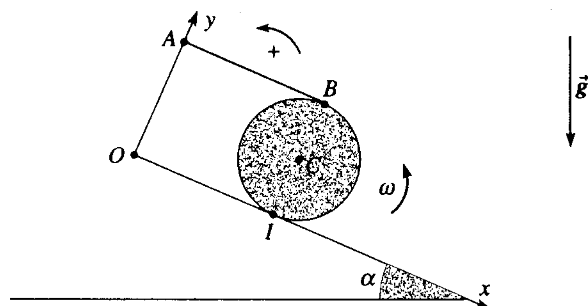
c) Tính giá trị cực tiểu f_0 của hệ số ma sát trượt để ngăn cản không cho thanh bị trượt.

d) Tính T_0 và f_0 đối với a = 0,2 m; b = 0,1 m; $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$; $\theta_0 = 0{,}1$ rad .

8 Cuộn dây trên mặt phẳng nghiêng

Một sợi dây quấn trên một ống dây xem như là một hình trụ đồng nhất (khối lượng m, bán kính R, momen quán tính $J = \frac{1}{2}mR^2$ so với trục) hình trụ dịch chuyển theo đường có độ nghiêng lớn nhất (Ox) của một mặt phẳng nghiêng một góc α so với đường nằm ngang.

Giả thiết là dây đủ mảnh để mẩu dây AB luôn luôn bị căng song song với (Ox). Hệ số ma sát giữa mặt phẳng nghiêng và ống dây là bằng f. Ở thời điểm ban đầu, ống dây đứng yên.



1) Với những giá trị nào của α ống dây còn đứng yên ?

2) Trong trường hợp chuyển động :

a) Tính gia tốc của tâm C của ống dây;

b) Tính tổng năng lượng giữa thời điểm đầu và thời điểm t.

9 Dao động của một hình trụ trong một máng nước

Ta xét một hình trụ $\mathscr{C}$ đồng chất, quán tâm là G, khối lượng m, bán kính a, momen quán tính là $J = \frac{1}{2}ma^2$ đối với trục của nó.

Khi áp dụng số, ta lấy m = 2kg và a = 5cm.

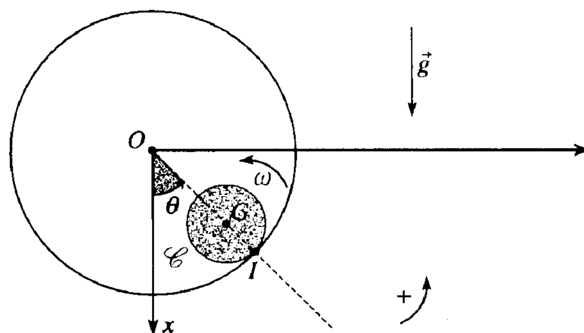
Gia tốc trọng trường là $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$.

Hệ quy chiếu trái đất (O; x, y, z) được xem là Galilé, trục (Ox) là thẳng đứng và hướng xuống dưới.

Hình trụ $\mathscr{C}$ lăn không trượt bên trong một hình trụ rỗng, cố định có tâm O bán kính b ($b > a$).

Các trục của hai hình trụ là nằm ngang và song song với (Oz).

Vị trí của $\mathscr{C}$ được xác định bởi góc θ.



1) Thiết lập hệ thức giữa $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, a, b và vận tốc góc ω của hình trụ $\mathscr{C}$ bằng cách sử dụng điều kiện lăn không trượt.

2) Tính động năng của $\mathscr{C}$ theo hàm của m, a, b và $\dot{\theta}$.

3) Chứng tỏ rằng có sự bảo toàn cơ năng và viết hệ thức tương ứng. Ta kí hiệu θ_m là biên độ cực đại của các dao động $\left(\theta_m < \frac{\pi}{2}\right)$. Biểu diễn $\dot{\theta}^2$ theo hàm của g, a, b, θ và θ_m.

4) Đối với câu hỏi này, ta đặt vào trường hợp đặc biệt θ nhỏ. Xác lập phương trình vi phân bậc hai mà θ là nghiệm.

Xác định chu kì T_0 của các dao động nhỏ trong trường hợp này. Tính chu kì đó đối với b = 20 cm.

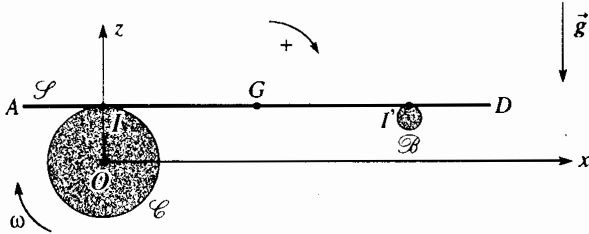
5) Xác định trong trường hợp tổng quát các biểu thức của thành phần pháp tuyến N và thành phần tiếp tuyến T của phản lực $\vec{R}$ của hình trụ rỗng tác dụng lên $\mathscr{C}$.

Cho biết các thành phần thay đổi như thế nào với θ và chứng tỏ rằng để thực sự luôn luôn chỉ có lăn mà không trượt, hệ số ma sát trượt f phải là lớn hơn một giá trị nào đó phụ thuộc vào θ_m mà ta sẽ xác định chính xác được.

10 Chuyển động của một tấm ván trên một hoặc hai hình trụ

Ta xét một tấm ván hình vuông $\mathscr{S}$ có khối lượng m, cạnh là $2a$, bề dày không đáng kể, các đỉnh là A, A', D', D và quán tâm G. Các chuyển động của tấm này được nghiên cứu trong hệ quy chiếu trái đất $\mathscr{R}$ giả thiết là Galilé. Trọng trường có cường độ kí hiệu là g.

Để áp dụng tính số, ta lấy $a = 0{,}2$ m và $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.



1) Tấm $\mathscr{S}$ được đặt không tốc độ đầu trên một thanh $\mathscr{B}$ và trên một hình trụ $\mathscr{C}$ có bán kính b. $\mathscr{B}$ và $\mathscr{C}$ có các trục song song nằm ngang sao cho tấm ván được nằm ngang : cạnh AA' song song với các trục này.

Cho hình trụ có chuyển động quay đều với vận tốc góc $\omega > 0$. Tiếp xúc giữa $\mathscr{S}$ và $\mathscr{B}$ là không ma sát trong lúc đó tiếp xúc giữa $\mathscr{S}$ và $\mathscr{C}$ có hệ số ma sát trượt là f.

Ta lấy $II' = a$, $IG = x$; lúc $t = 0$, G trùng với I.

a) Chứng tỏ rằng đầu tiên tấm ván trượt trên hình trụ và chuyển động.

b) Rút ra các định lí cơ học tổng quát về chuyển động của G trong pha trượt này.

c) Tìm hệ thức giữa f, g, a, b và ω sao cho luôn luôn có trượt : hệ thức (1).

d) Trong trường hợp hệ thức (1) được thỏa mãn, hãy viết các biểu thức của $x(t)$ và $\dot{x}(t)$. Vẽ các đồ thị tương ứng.

e) Giả sử hệ thức (1) không thỏa mãn. Hãy viết các biểu thức của $x(t)$ và $\dot{x}(t)$. Vẽ các đồ thị tương ứng.

f) Người ta cho $b = 0{,}1$ m và $f = 0{,}4$. Lúc nào tấm ván rời khỏi hình trụ với vận tốc góc :

$$\omega = 15 \text{ rad.s}^{-1}\ ? \qquad \omega = 5 \text{ rad.s}^{-1}\ ?$$

2) Thanh $\mathscr{B}$ được thay bằng hình trụ $\mathscr{C}'$ giống như $\mathscr{C}$ quay cùng vận tốc ω nhưng ngược chiều. Luôn luôn ta kí hiệu f là hệ số ma sát trượt của tấm ván lên mỗi hình trụ.

Khi $t = 0$, tấm ván được đặt nằm ngang trên các hình trụ trong các điều kiện sau :

$$x(O) = \frac{a}{2}\ ;\ 0 < \dot{x}(O) < b\omega .$$

a) Thiết lập phương trình chuyển động của G.

Điều kiện $0 < \dot{x}(O) < b\omega$ kéo theo những gì ?

b) Chứng tỏ rằng có một thí nghiệm cho phép xác định hệ số f bởi một phép đo thời gian.

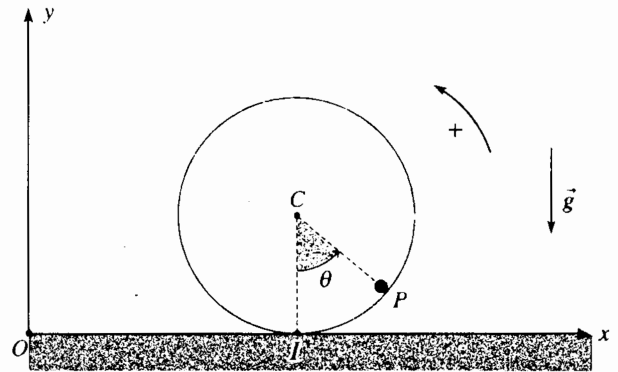
11 Chuyển động của một chất điểm trong một cái ống lăn không trượt

Trong một hệ quy chiếu trái đất giả thiết là Galilé, có một cái ống hình trụ bán kính R khối lượng M, momen quán tính $J = MR^2$ đối với trục của nó, lăn không trượt trên mặt đất nằm ngang.

Bên trong ống này có một chất điểm P khối lượng m trượt không ma sát.

Cả tập hợp được xác định vị trí theo tọa độ x của tâm C của ống và bởi góc $\theta = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CP})$ là góc xác định vị trí của chất điểm P.

Ở thời điểm đầu, cả tập hợp đứng yên và $\theta = \theta_0$.



1) Viết hai phương trình mà x, θ và các đạo hàm của chúng nghiệm đúng.

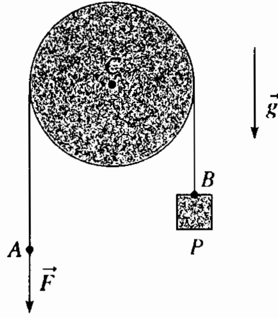
2) Giả thiết θ_0 nhỏ, tính chu kì của những dao động nhỏ của hệ.

12 Chuyển động một chất điểm trong một cái ống không có ma sát

Lấy lại bài toán trên (với cùng những chú thích) và giả thiết rằng không có ma sát nào giữa ống và mặt đất.

13 Dây quấn vòng qua một thanh trụ

Một cuộn dây không đàn hồi, khối lượng không đáng kể quấn vòng qua một thanh hình trụ bán kính R nằm ngang, đứng yên (dây vắt qua đúng nửa vòng của hình trụ).



Tính giá trị cực tiểu F_0 của lực F cần phải tác dụng ở đầu mút A của dây để ngăn cản không cho tải trọng P khối lượng m, móc vào đầu mút B của dây bị rơi xuống.

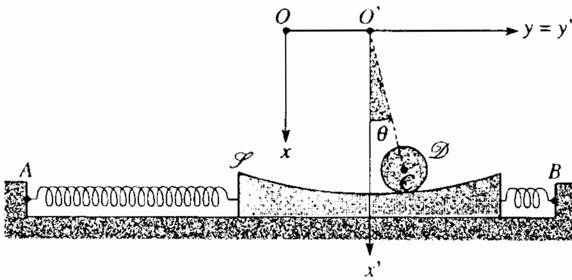
Giả thiết rằng hệ số ma sát trượt của dây đối với thanh là bằng f và trọng lượng của dây là không đáng kể so với lực căng ở tất cả các điểm của dây.

Vận dụng định lí tổng hợp động lực với một phần tử của dây tiếp xúc với thanh, sau đó lấy tích phân phương trình có được.

Tính $\dfrac{F_0}{mg}$ đối với $f = 0{,}2$.

14 Dao động của một hình trụ và giá đỡ

Ta xét hệ dưới đây, linh động trong hệ quy chiếu Galilé $(O;\ x,\ y,\ z)$ với (Ox) thẳng đứng, đi qua điểm giữa của AB.



Giá $\mathscr{S}$ có khối lượng M, có thể trượt mà không ma sát trên mặt đất nằm ngang.

Giá được nối với A và B bằng hai lò xo giống nhau, có độ đàn hồi là k. Hai lò xo không bị căng khi trung trực (Ox) của AB trùng với trung trực $(O'x')$ của $\mathscr{S}$ (tương ứng với vị trí cân bằng của hệ).

Mặt trên của $\mathscr{S}$ là một mặt hình trụ có tâm O' và bán kính a.

Trên $\mathscr{S}$ có một hình trụ $\mathscr{D}$ đồng nhất, tâm C, khối lượng m, bán kính b $(b < a)$, momen quán tính $J = \dfrac{1}{2}mb^2$ đối với trục của nó. Hình trụ $\mathscr{D}$ có thể lăn không trượt trên $\mathscr{S}$. Vị trí của hệ được xác định theo $y = \overline{OO'}$ và $\theta = (\overrightarrow{O'x'}, \overrightarrow{O'C})$.

1) Viết các phương trình chuyển động và tìm hai phương trình vi phân liên kết các biến y và θ, các đạo hàm của chúng và các thông số $a,\ b,\ g,\ k,\ M$ và m.

2) Giả sử rằng $M = m$, $a = 3b$, $\dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{b} = \omega^2$ và θ nhỏ.

Các phương trình trên sẽ thay đổi như thế nào (người ta sẽ dùng các thông số ω và b).

3) Ta tìm các nghiệm dưới dạng

$$\theta = \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi)\ ; \quad y = y_0 \cos(\Omega t + \varphi)\ .$$

a) Xác định giá trị của vận tốc góc Ω phụ thuộc vào ω để các nghiệm nói trên là thích hợp.

b) Trong những điều kiện trên giá trị cực tiểu của hệ số f của ma sát trượt giữa $\mathscr{S}$ và $\mathscr{D}$ phải như thế nào để có $\mathscr{D}$ không trượt trên $\mathscr{S}$?

BÀI GIẢI

1 *Đây là bài tính phẳng trong mặt phẳng (Oxy) của hệ quy chiếu trái đất mà ta giả thiết là Galilé. Giả sử thang và người dùng thang là cân bằng.*

Theo sơ đồ vẽ sau đây, ta có thể dùng các định luật Coulomb để biểu diễn phương trình của các lực ma sát $\vec{T_1}$ và $\vec{T_2}$; ta có thể đặt:

$$\vec{T_1} = T_1\vec{e}_x\ ; \quad \vec{N_1} = N_1\vec{e}_y \quad (T_1, N_1 > 0)$$
$$\vec{T_2} = -T_2\vec{e}_x\ ; \quad \vec{N_2} = N_2\vec{e}_y \quad (T_2, N_2 > 0)$$

Tổng hợp các lực ngoại tác dụng lên hệ (thang + người dùng) là bằng không, từ đó:

$$T_1 = T_2$$
$$N_1 = N_2 = mg$$

Momen đối với A (thí dụ) của các lực ngoại là bằng không, từ đó:

$$N_2 2b\sin\alpha = x\sin\alpha\, mg\ .$$

Ta suy ra từ đó:

$$N_2 = \frac{x}{2b}mg\ , \qquad N_1 = \frac{2b - x}{2b}mg$$

Để tính T_1 và T_2, ta biểu diễn momen đối với B của các lực ngoài chỉ tác dụng lên nửa để leo BC, momen đó bằng không:

$$N_2 b\sin\alpha - T_2 b\cos\alpha = 0\ .$$

Từ đó ta tìm được:

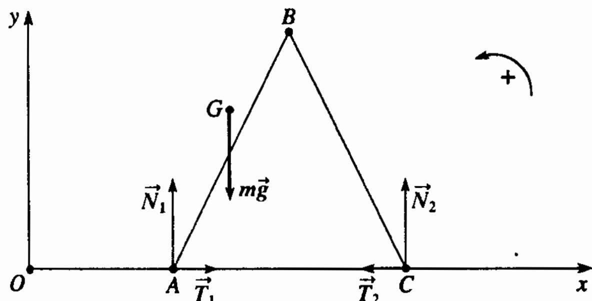
$$T_1 = T_2 = N_2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{2b}mg\operatorname{tg}\alpha$$

Các định luật COULOMB quy định:

$T_1 \le fN_1$, *ta suy ra* $\operatorname{tg}\alpha \le f\left(\dfrac{2b}{x} - 1\right)$, $T_2 \le fN_2$ *từ đấy* $\operatorname{tg}\alpha \le f$.

Biết rằng x là nhỏ hơn b, điều kiện thứ hai là hạn chế hơn điều kiện thứ nhất; người dùng thang có thể leo lên cao nếu $\operatorname{tg}\alpha \le f$.

Mặc dù vậy, giá trị giới hạn của α chắc chắn không phải là quá lớn (đối với f = 0,2 ta tìm thấy $\alpha_{\text{giới hạn}} \approx 11^0$); nếu người sử dụng muốn mở rộng thêm hai nửa thang ra thì phải dùng dây buộc chúng lại !



Chú ý :

Ở đây tác động của AB và BC ở B quy về một lực $\vec{F}$ tác dụng lên B (vì không có ma sát); theo định luật tác động và phản tác động, BC thực hiện lên AB một lực $-\vec{F}$. Khi giải, ta phải sắp xếp để tính các momen sao cho không có lực $\vec{F}$ này xen vào.

2 *Ta kí hiệu $(-T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y)$ là lực tiếp xúc ở A (các định luật Coulomb quy định $T_1, N_1 > 0$) và $N_2\vec{e}_y$ là lực tiếp xúc ở B (không có ma sát ở B).*

Định lí tổng hợp động lực khi chiếu lên (Ox) và (Oy) cho :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T_1 = -fN_1 \\ 0 = N_1 + N_2 - mg \end{cases}, \text{ vì có trượt ở A.}$$

Vận dụng định lí momen động lượng đối với G trong hệ quy chiếu trọng tâm, khi chiếu lên (Oz) ta có :

$$O = -hT_1 - bN_1 + bN_2 \text{ (vật rắn không quay), với } T_1 = fN_1.$$

Khử N_1 và N_2 trong ba phương trình, ta có :

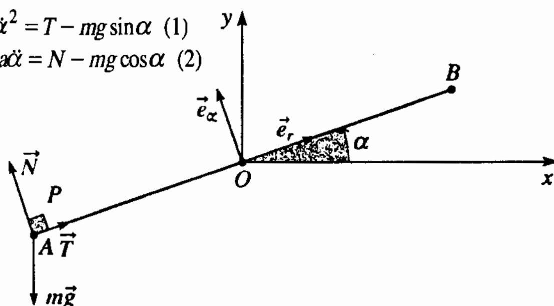
$$\ddot{x} = -\frac{fgh}{2b + fh} = cte = -a \ (a > 0).$$

Ta nhận xét rằng gia tốc này là không đổi và âm, và ta suy ra :

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2}\frac{2b + fh}{fgh}$$

3 *Ta vận dụng định lí tổng hợp động lực ở điểm P. Khi chiếu lên các trục tọa độ cực $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\alpha$, kí hiệu T và N là môđun của các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của lực tiếp xúc mà thanh tác dụng lên P :*

$$\begin{cases} m\dot{\alpha}^2 = T - mg\sin\alpha \ (1) \\ -m a\ddot{\alpha} = N - mg\cos\alpha \ (2) \end{cases}$$



Ta phải tính $\ddot{\alpha}$ và $\dot{\alpha}$ theo α. Muốn vậy, áp dụng cho cả tập hợp (thanh + P) định lí momen động lượng ở O, khi chiếu lên (Oz) :

$$(J + ma^2)\ddot{\alpha} = mga\cos\alpha$$

Ta có thể viết dưới dạng :

$$\ddot{\alpha} = \omega^2\cos\alpha \text{ với } \omega^2 = \frac{mga}{J + ma^2} = \frac{g}{a}\frac{3m}{M + 3m}.$$

Nhân hai vế của phương trình trên với $\dot{\alpha}$ và lấy tích phân phương trình có được trong khoảng từ thời điểm đầu đến một thời điểm nào đó, ta có :

$$\dot{\alpha}^2 = 2\omega^2\sin\alpha$$

Đưa các biểu thức của $\ddot{\alpha}$ và $\dot{\alpha}$ vào trong các phương trình (1) và (2) ta có :

$$\begin{cases} T = mg\sin\alpha + 2ma\omega^2\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha - ma\omega^2\cos\alpha \end{cases}$$

P còn ở trên thanh khi mà $N > 0$ và $|T| = T \le fN$ điều này quy định :

$$g > a\omega^2 \text{ và } \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\alpha_0 = f\frac{g - a\omega^2}{g + 2a\omega^2} = f\frac{M}{M + 9m}$$

Vậy nếu $g \le a\omega^2$, P rời khỏi thanh ngay từ khi bắt đầu chuyển động. Nếu $g > a\omega^2$, P rời khỏi thanh khi $\alpha = \alpha_0$.

4 *Khi xuất phát, vận tốc của thanh bằng không : thanh không trượt trên giá, và khoảng cách OC giữ không đổi và bằng a (điều này đúng khi mà thanh không trượt, như ta đã giả thiết ở bài tập).*

Vận dụng cho thanh định lí về tổng hợp động lực : kí hiệu T và N là môđun của các thành phần tiếp tuyến của phản lực của giá lên thanh ở O, khi chiếu lên các trục tọa độ cực $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$ ta có :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T \\ ma\ddot{\theta} = mg\cos\theta - N \end{cases}$$

Vận dụng cho thanh định lí momen động lượng đối với O, khi chiếu lên trục (Oz) :

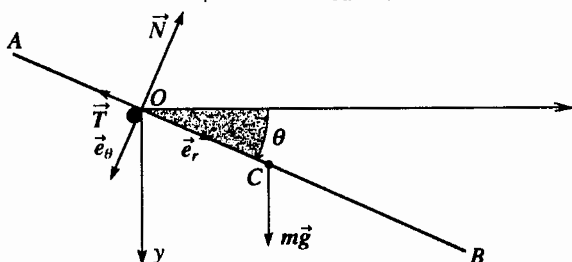
$$J\ddot{\theta} = \left(ma^2 + \frac{1}{3}mb^2\right)\ddot{\theta} = mga\cos\theta.$$

Nhân hai vế của phương trình này cho $\dot{\theta}$ và lấy tích phân phương trình có được từ thời điểm đầu đến một thời điểm nào đó, ta được :

$$\left(ma^2 + \frac{1}{3}mb^2\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} = mga\sin\theta.$$

Thay các biểu thức của $\ddot{\theta}$ và $\dot{\theta}$ trong hai phương trình đầu tiên, ta suy ra :

$$\begin{cases} T = mg\sin\theta\dfrac{9a^2 + b^2}{3a^2 + b^2} \\ N = mg\cos\theta\dfrac{b^2}{3a^2 + b^2} \end{cases}$$



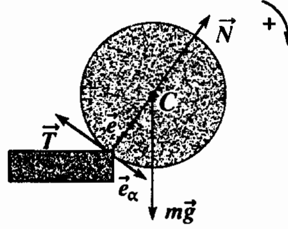
Thanh không trượt khi :

$$|T| = T \le fN,$$

điều này dẫn đến :

$$\text{tg}\theta \le \text{tg}\theta_0 = f\frac{b^2}{9a^2+b^2}.$$

5 *Đồ chơi hình trụ chịu tác dụng của trọng lượng $m\vec{g}$ của nó và phản lực của cái giá $(N\vec{e}_r - T\vec{e}_\alpha)$ đặt lên điểm A ở hình vẽ bên. T và N là dương theo định luật* COULOMB.



Khi xuất phát, vận tốc của điểm A của đồ chơi hình trụ là bằng không; ta giả thiết rằng đồ chơi này không trượt trên giá ở pha đầu tiên, điều mà ta sẽ kiểm nghiệm lại về sau.

Vận dụng định lí tổng hợp động lực, khi chiếu lên $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\alpha$, ta được :

$$\begin{cases} -mR\dot{\alpha}^2 = N - mg\cos\alpha \\ mR\ddot{\alpha} = -T + mg\sin\alpha \end{cases}$$

Tiếp đó, vận dụng định lí momen động lượng đối với A (cố định), chiếu lên (Oz) :

$$J_A\ddot{\alpha} = mgR\sin\alpha$$

với $J_A = mR^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$ *(định lí* HUYGENS*)*

Nhân phương trình cuối này với α và lấy tích phân từ thời điểm O đến thời điểm t, ta có :

$$\frac{3}{4}mR^2\dot{\alpha}^2 = mgR(-\cos\alpha + 1),$$

(Chú ý là ta có thể có hệ thức cuối cùng này khi áp dụng định lí về động năng).

Vậy ta có thể biểu diễn T và N theo α :

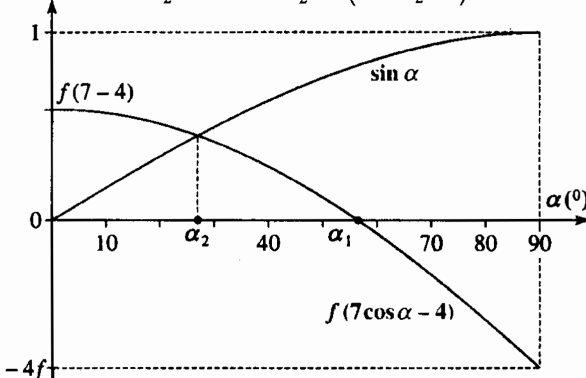
$$T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha \quad \text{và} \quad N = \frac{1}{3}mg(7\cos\alpha - 4)$$

Giả thiết rằng đồ chơi hình trụ vẫn tiếp xúc với giá, tức là $N \ge 0$, nghĩa là nếu :

$$7\cos\alpha - 4 \ge 0, \text{ vậy } \alpha \le \alpha_1 \text{ cho bởi } \cos\alpha_1 = \frac{4}{7}$$

Đồ chơi hình trụ không trượt ở A nếu $T \le fN$ (nhớ rằng T và N đều dương), nghĩa là khi $\sin\alpha \le f(7\cos\alpha - 4)$, tức là :

$$\alpha \le \alpha_2 \text{ cho bởi } \sin\alpha_2 = f(7\cos\alpha_2 - 4)$$

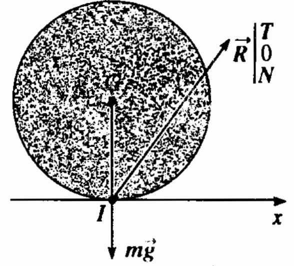


Ta đã biểu diễn ở sơ đồ trên đây các đường cong của hàm $\sin\alpha$ và $f(7\cos\alpha - 4)$. Ta cũng nhận xét rằng $\alpha_2 < \alpha_1$ và đồ chơi hình trụ như vậy là bắt đầu trượt trước khi rời giá đỡ. Quá trình trượt bắt đầu từ khi độ nghiêng là $\alpha_0 = \alpha_2$.

Áp dụng số : $\alpha_0 = \alpha_2 = 0,47$ rad , vậy là $27°$.

Chú ý : Vượt khỏi độ nghiêng α_0, các phương trình trên rõ ràng là không còn giá trị nữa vì đồ chơi hình trụ bị trượt. Nhất là không nên kết luận rằng đồ chơi hình trụ rời khỏi giá ở độ nghiêng α_1.

6 1) *Ta kí hiệu x là tọa độ của điểm G.*



Vận dụng cho hình trụ :

- *định lí tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu trái đất; khi chiếu lên các trục (Ox) và (Oz) ta được :*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T \\ O = -mg + N \end{cases}$$

- *định lí momen động lượng đối với G, trong hệ quy chiếu trọng tâm của hình trụ, khi chiếu lên (Oy) ta được :*

$$J\dot{\omega} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\omega} = -aT$$

Khi khởi động, hình trụ trượt mạnh trên mặt phẳng (ban đầu số đo đại số của vận tốc điểm I của hình trụ bằng $-a\omega_0$) : định lí COULOMB *quy định $T > 0$ và $T = fN$.*

Từ đó ta suy ra : $\ddot{x} = gf$, và $\dot{x} = fgt$ có tính đến các điều kiện đầu;

$\dot{\omega} = -2\frac{fg}{a}$, *từ đó* $\omega = -2\frac{fg}{a}t + \omega_0$, *có tính đến các điều kiện đầu.*

Vận tốc trượt của hình trụ là :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_{\text{hình trụ}}) = \vec{v}(G) + \vec{\omega} \wedge \vec{GI} = (\dot{x} - a\omega)\vec{e}_x.$$

Vậy số đo đại số là : $v_g = 3fgt - a\omega_0$.

2) *Sự trượt chấm dứt ở thời điểm t_1 xác định bởi $v_g = 0$ vậy*

$t_1 = \frac{a\omega_0}{3fg}$, *từ đó :*

$$\dot{x}_1 = \dot{x}(t_1) = \frac{1}{3}a\omega_o;\ \omega_1 = \frac{1}{3}\omega_o;\ x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}fgt_1^2 = \frac{1}{18}\frac{a^2\omega_0^2}{fg}$$

Áp dụng số : $\dot{x}_1 = 1$ m.s^{-1} ; $\omega_1 = 20$ rad.s^{-1} ; $x_1 = 0,5$ m.

3) *Ta xác định công của lực tiếp xúc $\vec{R}$ tương ứng với công của lực ma sát $\vec{T} = T\vec{e}_x$:*

$$W = \int_0^{t_1}\vec{R}\cdot\vec{v}(I_{\text{hình trụ}})dt = \int_0^{t_1}Tv_g dt = \int_0^{t_1}fmg(3fgt - a\omega_0)dt,$$

vậy :

$$W = -\frac{1}{6}ma^2\omega_0^2.$$

Chúng ta có thể tìm lại công này bằng cách vận dụng định lí về động năng của hình trụ trong khoảng từ thời điểm đầu đến thời điểm t_1 :

$$W = \mathscr{E}_K(t_1) - \mathscr{E}_K(0) = \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2\right) - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

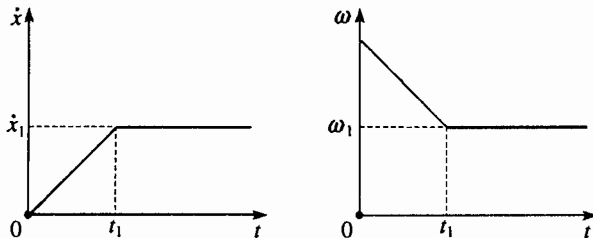
Thay thế $\dot{x}_1$ và ω_1 bởi các giá trị của chúng, rõ ràng là ta tìm thấy được cùng kết quả.

Áp dụng số : $W = -3J$

4) *Sau thời điểm t_1, hình trụ lăn không trượt trên mặt đất ($\dot{x} - a\omega = 0$) ; lúc đó công của lực tiếp xúc luôn luôn là bằng không và động năng của hình trụ không đổi, từ đó*

$$\dot{x} = \text{cte} = \dot{x}_1 \text{ và } \omega = \text{cte} = \omega_1 .$$

Sơ đồ dưới đây biểu diễn đồ thị của $\dot{x}$ và ω phụ thuộc thời gian.

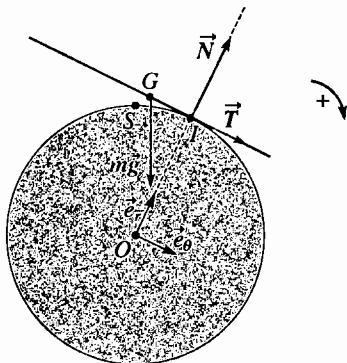


7 1) *Vận dụng định lí KŒNIG để tính động năng của thanh :*

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv^2(G) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 .$$

Đưa vào các vectơ đơn vị ở tọa độ cực $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$, ta tính vận tốc 0 của khối tâm G của thanh :

$$\overrightarrow{OG} = b\vec{e}_r - b\theta\vec{e}_\theta$$



Vì thanh không trượt, các chiều dài IG của thanh và IS = bθ của hình trụ là bằng nhau, từ đó lấy đạo hàm :

$$v(G) = b\theta\dot{\theta}\vec{e}_r .$$

Ta suy ra : $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(b^2\theta^2 + \frac{a^2}{3}\right)$.

2) *Thanh chịu tác dụng trọng lượng $m\vec{g}$ của nó và phản lực tiếp xúc của hình trụ ở I là $\vec{N} + \vec{T}$. Vì không trượt, phản lực ($\vec{N} + \vec{T}$) không làm việc và cơ năng của thanh là không đổi khi chuyển động.*

$$\mathscr{E}_K - m\vec{g}.\overrightarrow{OG} = \text{cte}, \text{ vậy } \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left(b^2\theta^2 + \frac{a^2}{3}\right) + g\left(b\cos\theta + b\theta\sin\theta\right) = \text{cte}.$$

Lấy đạo hàm và giản lược $\dot{\theta}$ ta được :

$$\ddot{\theta}\left(b^2\theta^2 + \frac{a^2}{3}\right) + b^2\theta\dot{\theta}^2 + gb\theta\cos\theta = 0 .$$

3) a) *Chỉ giữ những số hạng bậc một của θ, phương trình trên trở thành* $\frac{a^2}{3}\ddot{\theta} + gb\theta = 0$.

b) *Ta nhận thấy một phương trình vi phân cổ điển mà tính đến các điều kiện đầu, nghiệm là :*

$$\theta = \theta_0 \cos\Omega t , \text{ với } \Omega = \sqrt{\frac{3gb}{a^2}}$$

Chu kì T_0 của các dao động là $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\frac{a}{\sqrt{3gb}}$.

c) *Viết định lí tổng hợp động lực theo cách chiếu lên các trục của tọa độ cực $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$:*

$$\begin{cases} mb(\dot{\theta}^2 + \theta\ddot{\theta}) = N - mg\cos\theta \\ mb\theta\dot{\theta}^2 = T + mg\sin\theta \end{cases}$$

Với giả thiết là θ nhỏ, từ trên ta có :

$$N \approx mg \text{ và } T \approx -mg\theta$$

Định luật COULOMB quy định $|T| \leq f|N|$, từ đó $|\theta| \leq f$ ở mọi thời điểm. Vậy phải lấy $f \geq f_0 = \theta_0$.

d) *Áp dụng số $T_0 = 0,73s$; $f_0 = 0,1$.*

8 *Ta viết các phương trình chuyển động. Cuộn dây chịu tác dụng :*

- *lực căng $\vec{T}_{dây}$ của dây : $\vec{T}_{dây} = -T_{dây}\vec{e}_x$ ($T_{dây} > 0$);*
- *trọng lượng $m\vec{g}$ của nó;*
- *phản lực mặt đất : $\vec{R} = -T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$, với N>0 và $T \geq 0$ (vì nếu cuộn dây trượt nó bắt buộc phải hướng xuống).*

Áp dụng cho cuộn dây :

- *định lí tổng hợp động lực, chiếu lên trục (Ox) và (Oy) trong hệ quy chiếu (O; x, y, z) galilé :*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T_{dây} - T + mg\sin\alpha \\ O = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

- *định lí momen của động lượng đối với C, trong hệ quy chiếu trọng tâm của cuộn dây, chiếu lên trục (Oz) :*

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} = R(T_{dây} - T)$$

Ở đây kí hiệu $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ là vectơ quay của cuộn dây. Ta viết những hệ thức động học.

Dây không trượt trên cuộn dây, ta có :

$$\vec{v}(B_{dây}) = \vec{v}(B_{cuộn\ dây}) = \vec{O}$$

Từ đó $\vec{v}(C) = \vec{v}(B_{cuộn\ dây}) + \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{BC} = \omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{BC}$ vậy $\dot{x} = R\omega$.

Tốc độ trượt là $v_g = \vec{v}(I_{cuộn\ dây}).\vec{e}_x = (\omega\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{BI}).\vec{e}_x = 2R\omega = 2\dot{x}$

1) Cuộn dây đứng yên : $\ddot{x} = 0$, $\dot{\omega} = 0$, từ đó :

$$T_{dây} = T = \frac{1}{2}mg\cos\alpha \quad \text{và} \quad N = mg\cos\alpha .$$

Định luật COULOMB quy định $T \leq fN$, từ đó $tg\alpha \leq 2f$.

2) *Nếu $tg\alpha > 2f$, cuộn dây trượt. Định luật COULOMB quy định $T = fN$ và các phương trình dẫn đến :*

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\left(\sin\alpha - 2f\cos\alpha\right).$$

3) Ta có thể nghiệm ra rằng giữa các thời điểm 0 và t biến thiên động năng là :

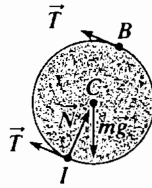
$$\mathscr{E}_K(t) - \mathscr{E}_K(0) = \mathscr{E}_K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$
$$= \frac{1}{3}mg^2(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)^2 t^2$$

là bằng công W của các lực tác dụng lên cuộn dây. Chỉ có trọng lượng $m\vec{g}$ và lực ma sát $-T\vec{e}_x$ làm việc :

$$W = mg\sin\alpha\left(x(t) - x(0)\right) - \int_0^t Tv_g \mathrm{d}t ,$$

hay $W = (mg\sin\alpha - 2fmg\cos\alpha)(x(t) - x(0))$,

và $W = \frac{1}{3}mg^2\left(\sin\alpha - 2f\cos\alpha\right)^2 t^2 = \Delta\mathscr{E}_K$.



9 1) Điều kiện lăn không trượt cho ta :

$$\vec{v}(I_{\text{hình trụ}}) = \vec{0} = \vec{v}(G) + \omega\vec{e}_z \wedge \vec{GI} ,$$

vậy $(b - a)\dot{\theta} + \omega a = 0$.

2) Động năng của hình trụ $\mathscr{C}$ là :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}mv(G)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

vậy tính đến các kết quả của câu hỏi 1) :

$$\mathscr{E}_K = \frac{3}{4}m(b-a)^2\dot{\theta}^2$$

3) Vì lăn không trượt, công của lực tiếp xúc ống nước - hình trụ là bằng không, do đó cơ năng của hình trụ $\mathscr{C}$ bảo toàn, điều này cho ta :

$$\mathscr{E}_M = \mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \mathscr{E}_K - m\vec{g}.\vec{OG} = \text{cte}$$

vậy $\frac{3}{4}m(b-a)^2\dot{\theta}^2 - mg(b-a)\cos\theta = \text{cte}$.

Ta có thể xác định hằng số khi biên độ θ của các dao động là cực đại, vậy $\theta = \theta_m$ với điều cần thiết là $\dot{\theta} = 0$, từ đó :

$$\frac{3}{4}(b-a)\dot{\theta}^2 = g(\cos\theta - \cos\theta_m) .$$

4) Lấy đạo hàm theo thời gian của phương trình trên, giả sử là θ nhỏ ta có : $\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(b-a)}\theta$,

Vậy θ là một hàm sin của thời gian với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{3(b-a)}{2g}}$.

Áp dụng số : $T = 0{,}94$ s.

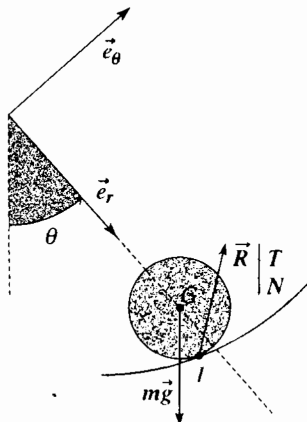
5) Áp dụng định lí tổng hợp động lực cho hình trụ $\mathscr{C}$ chiếu lên các trục tọa độ cực :

$$\begin{cases} -m(b-a)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \\ m(b-a)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + T \end{cases}$$

Ta đã tính $\dot{\theta}^2$ ở câu hỏi 3): $\ddot{\theta}$ suy ra từ đó bằng cách lấy đạo hàm hệ thức có được; thay $\dot{\theta}^2$ và $\ddot{\theta}$ trong các biểu thức của T và của N, ta có :

$$N = \frac{1}{3}mg\left(7\cos\theta - 4\cos\theta_m\right)$$

$$T = \frac{1}{3}mg\sin\theta .$$



Hình trụ sẽ luôn luôn lăn mà không trượt trong ống nước khi $|T| \le f|N|$, điều này cho ta :

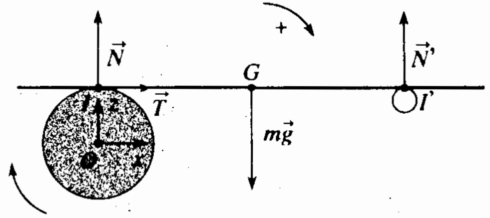
$$f \ge \frac{\sin\theta}{7\cos\theta - 4\cos\theta_m} \text{ bất kể } \theta \text{ như thế nào.}$$

Điều kiện này luôn luôn được nghiệm đúng, cả khi $\theta = \theta_m$, vậy phải có :

$$f \ge \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\theta_m$$

10 1) a) Ban đầu điểm tiếp xúc I_p của tấm ván có vận tốc bằng không, lúc đó điểm trùng hợp I_c của hình trụ và vận tốc $\omega b\vec{e}_x$ là khác không, tấm ván trượt trên hình trụ.

b) Chúng ta biểu diễn ở sơ đồ dưới đây các lực khác nhau tác dụng lên tấm ván :



Áp dụng cho tấm ván $\mathscr{S}$:

• định lí tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu Galilé trái đất, chiếu lên (Ox) và (Oz) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T \\ 0 = N + N' - mg \end{cases} ;$$

• Định lí momen động lượng đối với G (biết rằng tấm ván không quay) trong hệ quy chiếu trọng tâm của tấm ván, chiếu lên (Oy) :

$$0 = Nx - N'(a - x)$$

Chúng ta rút ra $N = \frac{a-x}{a}$ và sử dụng các định luật COULOMB (vận tốc trượt của thanh ở I là hướng theo chiều x giảm).

$$N > 0,\ T > 0,\ T = fN = f\frac{a-x}{a}mg \text{ , từ đó } \ddot{x} = f\frac{a-x}{a}g .$$

Lấy tích phân, tính đến các điều kiện đầu, ta có :

$$x = a(1 - \cos\Omega t), \text{ với } \Omega = \sqrt{\frac{fg}{a}} .$$

c) Vận tốc trượt của tấm ván ở I được viết thành :

$$v_g = \dot{x} - \omega b = a\Omega\sin\Omega t - \omega b .$$

Biết rằng G phải ở giữa I và I', Ωt thay đổi từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ và v_g là một hàm tăng của t (v_g là âm, giá trị v_g giảm).

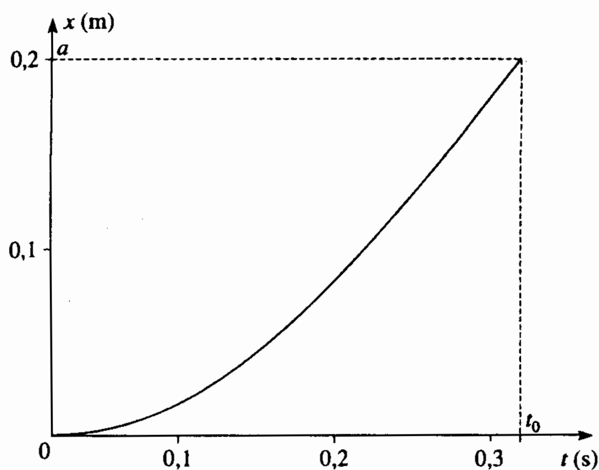
Thanh luôn luôn trượt trên hình trụ nếu :

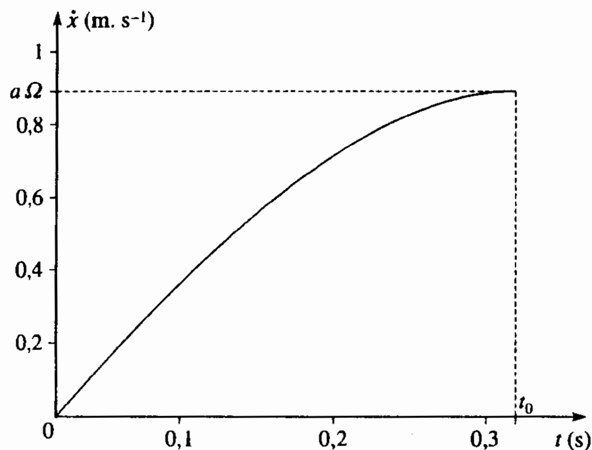
$$\omega b > a\Omega, \text{ tức là nếu } \omega b > \sqrt{afg} \quad (1)$$

d) Trong các điều kiện mà luôn luôn có trượt (nghĩa là nếu $\omega b > a\Omega$ thì :

$$x(t) = a(1 - \cos\Omega t); \quad \dot{x}(t) = a\Omega\sin\Omega t ,$$

cho đến thời điểm $t_0 = \frac{\pi}{2\Omega}$ tức là thời điểm tấm ván rời hình trụ.





e) *Nếu $\omega b < a\Omega$ vận tốc trượt triệt tiêu ở thời điểm t_1 xác định bởi :*

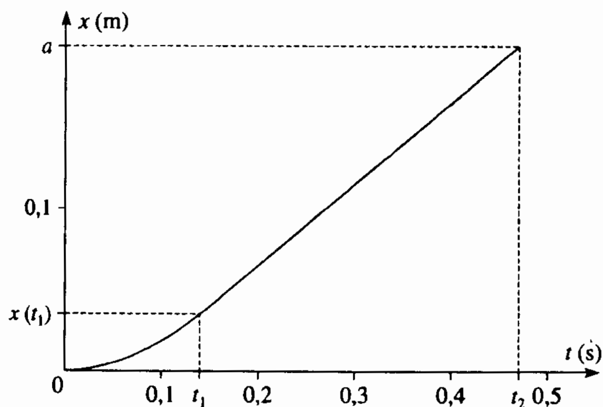
$$\sin \Omega t_1 = \frac{\omega b}{\Omega a}.$$

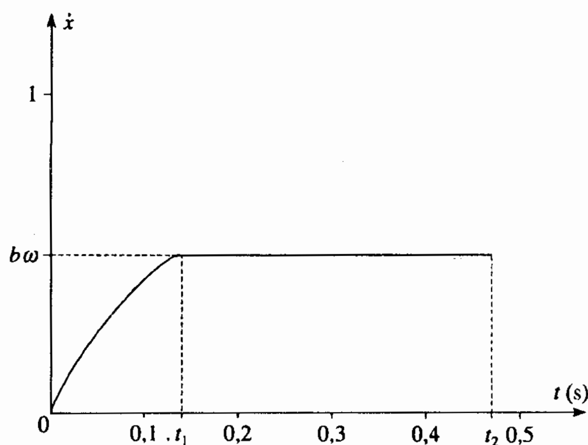
Tiếp đó, tấm ván lăn mà không trượt trên hình trụ $\mathscr{C}$.

Do đó :

- *giữa các thời điểm 0 và t_1 :* $x(t) = a(1-\cos\Omega t)$; $\dot{x}(t) = a\Omega \sin\Omega t$
- *sau thời điểm t_1 :* $x(t) = x(t_1) + \omega b(t - t_1)$; $\dot{x}(t) = \omega b$

Tấm ván rời hình trụ $\mathscr{C}$ ở thời điểm t_2 xác định bởi $x(t_2) = a$.





f) *Đối với $\omega = 15$ rad.s^{-1}, tấm ván luôn luôn trượt trên $\mathscr{C}$ và sẽ rời khỏi C vào thời điểm $t_0 = 0,35s$.*

- *Đối với $\omega = 5$ rad.s^{-1}, tấm ván trượt trên $\mathscr{C}$ cho đến thời điểm $t_1 = 0,14$s $(x(t_1) = 0,035\,\text{m})$; tiếp theo đó tấm ván lăn không trượt trên hình trụ và sẽ rời khỏi hình trụ ở thời điểm $t_2 = 0,47$s.*

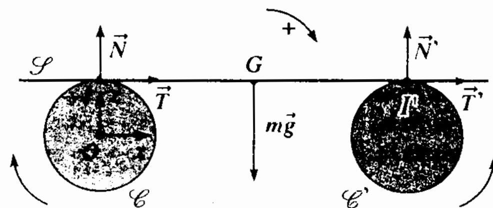
2) a) *Lại áp dụng cho tấm ván trong hệ quy chiếu Galilé trái đất :*

- *Định lí tổng hợp động lực, chiếu lên (Ox) và (Oz) :*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T + T' \\ O = N + N' - mg \end{cases}$$

- *Định lí momen động lượng ở G trong hệ quy chiếu trọng tâm của tấm ván, chiếu lên (Oy) :*

$$O = Nx - N'(a - x).$$



Cũng như ở câu hỏi **1) b)** *ta tính* $N = \frac{a-x}{a}mg$ *, rồi* $N' = \frac{x}{a}mg$.

Khi khởi động, tấm ván trượt trên hai hình trụ :

- *Ở I vận tốc trượt là hướng theo chiều x giảm* $(v_g = \dot{x} - \omega b < 0)$ *, T dương và bằng T = fN.*
- *Ở I' vận tốc trượt hướng theo chiều x tăng* $(v'_g = \dot{x} + \omega b > 0)$*, T' là âm và bằng T'= - fN'.*

Ta suy ra :

$$m\ddot{x} = f\left(N - N'\right), \quad \text{vậy } \ddot{x} = 2\frac{fg}{a}x + fg,$$

tính đến các điều kiện đầu, nghiệm là

$$x = \frac{a}{2} + \frac{v_0}{\Omega'}\sin\Omega' t$$

Với $\Omega' = \sqrt{\frac{2fg}{a}}$ và $v_o = \dot{x}(0)$

Ta nhận thấy rằng vận tốc của tấm ván dao động giữa $-v_0$ và $+v_0$; tấm ván sẽ trượt không dừng lại trên mỗi hình trụ, điều này đảm bảo tính đúng đắn của nghiệm tìm được ở mọi thời điểm (rõ ràng là với giả thiết tấm ván không rời khỏi các hình trụ, nghĩa là giả thiết rằng $\frac{v_0}{\Omega'} < \frac{a}{2}$).

b) Như vậy, đo chu kì $T' = \frac{2\pi}{\Omega}$, của dao động của tấm ván, ta có thể rút ra giá trị của hệ số ma sát $f = \frac{2\pi^2 a}{gT'^2}$.

11 1) Chúng ta phải viết hai phương trình không có các lực tiếp xúc chưa biết xen vào, để biết tác động của đất lên ống và tương tác giữa điểm P và ống.

• Những lực tiếp xúc này không sinh công, một mặt là vì ống không trượt trên mặt đất và mặt khác là vì không có ma sát giữa điểm P và ống, cơ năng của hệ {ống + điểm P} được bảo toàn trong quá trình chuyển động. Ta có :

$$\mathscr{E}_K = \left(\frac{1}{2}Mv(C)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}mv(P)^2 \quad \text{với } \vec{v}(C) = \dot{x}\vec{e}_x$$

Vận tốc quay $\dot{\varphi}\vec{e}_z$ của ống được cho bởi :

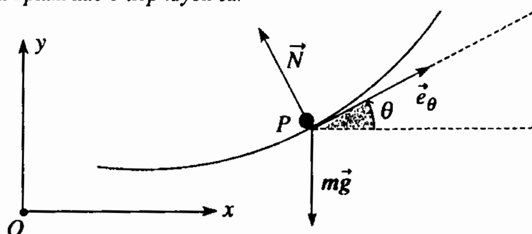
$$\vec{v}(I_{\text{ống}}) = \vec{0} = \vec{v}(C) + \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{CI}\text{, từ đó } O = \dot{x} + R\dot{\varphi}$$

$$\overrightarrow{OP}\begin{vmatrix} x + R\sin\theta \\ R - R\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \text{ từ đó } \vec{v}(P)\begin{vmatrix} \dot{x} + R\cos\theta\,\dot{\theta} \\ R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\mathscr{E}_P = -m\vec{g}.\overrightarrow{CP} + \text{cte} = -m\,g\,R\cos\theta + \text{cte}$ (thế năng trọng trường của ống là không đổi), từ đó :

$$\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - mgR\cos\theta = \text{cte} \quad (1).$$

• Bây giờ ta vận dụng hệ thức cơ bản của động lực học đối với chất điểm P, chiếu lên tiếp tuyến của vòng tròn ở P, tức là $\vec{e}_\theta$, trong hệ quy chiếu trái đất. Phản lực của ống là vuông góc với ống, không có thành phần nào ở tiếp tuyến cả.



Ta có được gia tốc $\vec{a}(P)$ của điểm P bằng cách lấy đạo hàm của vận tốc $\vec{v}(P)$ đã viết ra ở trên.

$$m\vec{a}(P).\vec{e}_\theta = m(\ddot{x}\cos\theta + R\ddot{\theta}) = -mg\sin\theta \quad (2)$$

<u>Chú ý :</u>

Chúng tôi khuyên độc giả tìm phương trình cuối cùng này bằng cách áp dụng vào điểm P định lí momen động lượng đối với C :

• hoặc trong hệ quy chiếu trái đất (và C là chuyển động) ;

• hoặc trong hệ quy chiếu của tâm C và chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}(C)$ so với hệ quy chiếu trái đất (và hệ quy chiếu chuyển động này không phải là galilê).

2) Ta lấy đạo hàm nguyên hàm của năng lượng (1) rồi bỏ các số hạng bậc cao hơn hai, ta được :

$$(2M + m)\dot{x}\ddot{x} + m(R^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + R\dot{x}\dot{\theta} + R\dot{x}\ddot{\theta}) + mgR\dot{\theta}\theta = 0 \quad (3)$$

Chỉ giữ những số hạng bậc một trong phương trình (2) ta có :

$$\ddot{x} + R\ddot{\theta} + g\theta = 0 \quad (4)$$

Nhân phương trình (4) với $mR\dot{\theta}$ và trừ theo từng số hạng của phương trình vừa có được với phương trình (3), sau khi đơn giản hóa với $\dot{x}$:

$$(2M + m)\ddot{x} + mR\ddot{\theta} = 0 \quad (5)$$

Cuối cùng khử $\ddot{x}$ từ các phương trình (5) và (4) ta có :

$$2MR\ddot{\theta} = -(2M + m)g\theta$$

Nghĩa là một phương trình vi phân đặc trưng của dao động hình sin với vận tốc góc :

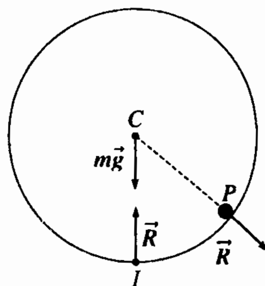
$$\Omega = \sqrt{\frac{(2M+m)g}{2MR}} \quad \text{và chu kì } T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{(2M+m)g}}$$

Chất điểm và ống dao động ngược pha với nhau vì :

$$\theta = \theta_0\cos\Omega t \quad \text{và} \quad x = \frac{mR}{2M+m}\theta_0(1 - \cos\Omega t)$$

(giả thiết là $x = 0$ ở thời điểm đầu).

12 Ta vận dụng chỉ riêng cho cái ống định lí momen động lượng đối với C trong hệ quy chiếu trọng tâm; tất cả các lực (trọng lượng, phản lực mặt đất phản lực của chất điểm) tác dụng lên ống đi qua C. Chúng ta suy ra rằng momen động lượng của ống luôn luôn bằng không, tính đến các điều kiện đầu thì ống không quay, chỉ duy nhất có chuyển động tịnh tiến.



Ta có thể áp dụng :

• định lí momen động lượng đối với C của điểm P trong hệ quy chiếu động chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}(C) = \dot{x}\vec{e}_x$ đối với hệ quy chiếu trái đất : nhớ rằng có momen của lực quán tính kéo theo, ta được :

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta - mR\ddot{x}\cos\theta \;;$$

• định lí tổng hợp động lực cho toàn bộ {ống + điểm P}, trong hệ quy chiếu trái đất, chiếu lên trục (Ox) nằm ngang :

$$M\ddot{x} + m(\ddot{x} + R(-\sin\theta\dot{\theta}^2 + \cos\theta\ddot{\theta})) = 0 \;;$$

Vì rằng các lực tác dụng lên hệ này đều thẳng đứng.

<u>Chú ý :</u>

Chúng ta cũng có thể dùng như ở bài tập trước, nguyên hàm của năng lượng :

$$\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - mgR\cos\theta = \text{cte}.$$

Lấy đạo hàm phương trình này, ta có thể nghiệm lại là có thể suy ra được hai phương trình trên.

Trong trường hợp dao động nhỏ, các phương trình trên được giản lược thành :

$$R\ddot{\theta} = -g\theta - \ddot{x}$$
$$(M+m)\ddot{x} + mR\ddot{\theta} = 0$$

Từ đấy ta suy ra $MR\ddot{\theta} = -(M+m)g\theta$

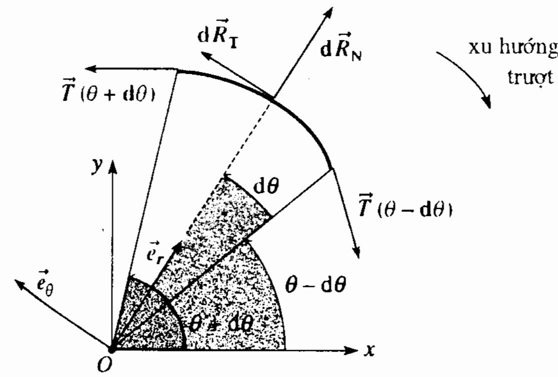
Chất điểm và cái ống thực hiện những dao động hình sin ngược pha với nhau :

$$\theta = \theta_0 \cos\Omega' t \text{ và } x = \frac{mR}{M+m}\theta_0\left(1-\cos\Omega' t\right),$$

(với giả thiết là $x = 0$ ở thời điểm đầu) với vận tốc góc :

$$\Omega' = \sqrt{\frac{(M+m)g}{MR}} \text{ và chu kì } T' = \frac{2\pi}{\Omega'}$$

13 Xét một phần tử của sợi dây chiều dài $2R\,\mathrm{d}\theta$ nằm giữa $(\theta - \mathrm{d}\theta)$ và $(\theta + \mathrm{d}\theta)$.



Trên phần tử của dây này có các lực tác dụng $\vec{T}(\theta - \mathrm{d}\theta)$ và $\vec{T}(\theta + \mathrm{d}\theta)$ (của phần còn lại của dây) và phản lực $\mathrm{d}\vec{R}_N + \mathrm{d}\vec{R}_T$ của thanh tác dụng lên dây.

Từ cân bằng của dây trên thanh, ta có :

$$\vec{T}(\theta - \mathrm{d}\theta) + \vec{T}(\theta + \mathrm{d}\theta) + \mathrm{d}\vec{R}_T + \mathrm{d}\vec{R}_N = \vec{0},$$

vậy khi chiếu lên các trục tọa độ cực :

- chiếu lên $\vec{e}_r$: $-\mathrm{d}\theta T(\theta - \mathrm{d}\theta) - \mathrm{d}\theta T(\theta + \mathrm{d}\theta) + \mathrm{d}R_N = 0$ $(\mathrm{d}R_N > 0)$
- chiếu lên $\vec{e}_\theta$: $T(\theta + \mathrm{d}\theta) - T(\theta - d\theta) + \mathrm{d}R_T = 0$,

($\mathrm{d}R_T \geq 0$ theo định luật COULOMB).

($\mathrm{d}\theta$ nhỏ, rõ ràng là ta giả thiết $\cos\mathrm{d}\theta \approx 1$ và $\sin\mathrm{d}\theta \approx \mathrm{d}\theta$).

Vậy ta có $\mathrm{d}R_N \approx 2T(\theta)\mathrm{d}\theta$ và $\mathrm{d}R_T \approx -2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta$

Ở giới hạn trượt : $\mathrm{d}R_T = f\,\mathrm{d}R_N$, từ đó $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = -fT$

Lấy tích phân giữa O và π : $T(\pi) = T(0)e^{-f\pi}$.

Để giữ tải trọng P, ta phải tác dụng một lực tối thiểu : $F_0 = mge^{-f\pi}$.

Áp dụng số : $\frac{F_0}{mg} = 0{,}53$

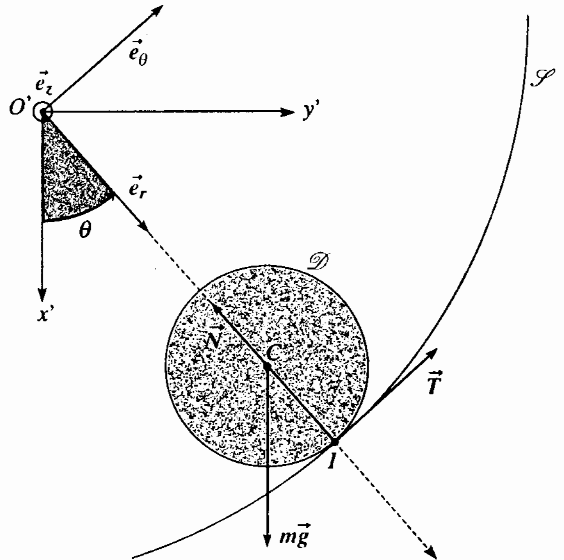
Chú ý :

Nếu dây thực hiện 2,5 vòng quanh thanh (θ thay đổi giữa 0 và 5π) tỉ số này là 0,04. Lực F_0 giảm rất nhanh khi quấn dây quanh thanh.

14 1) Ta áp dụng

- Đối với hình trụ, định lí tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu không Galilê $\mathcal{R}(O'; x', y', z')$ chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\dot{y}\vec{e}_y$ so với hệ quy chiếu Galilê $\mathcal{R}(O; x, y, z)$. Khi chiếu lên các trục tọa độ cực $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\theta$, ta được :

$$\begin{cases} -m(b-a)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N - m\ddot{y}\sin\theta \quad (N > 0) \\ m(b-a)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + T - m\ddot{y}\cos\theta \quad (T \text{ đại số}) \end{cases}$$



- Đối với hình trụ, định lí momen động lượng đối với C trong hệ quy chiếu trọng tâm khi chiếu lên (Oz) : $J\dot{\alpha} = \frac{1}{2}mb^2\dot{\alpha} = bT$.

Tốc độ $\dot{\alpha}$ của hình trụ liên hệ với $\dot{\theta}$ bởi điều kiện lăn không trượt ; ta viết điều kiện này trong $\mathcal{R}'$:

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_{\text{hình trụ}})_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} = \vec{v}(C)_{/\mathcal{R}'} + \dot{\alpha}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CI}$$

Từ đó : $(a-b)\dot{\theta} + \dot{\alpha}b = 0$;

- đối với giá $\mathcal{S}$, định lí tổng hợp lực trong hệ quy chiếu Galilê $\mathcal{R}$. Ta không quan tâm hình chiếu trên trục thẳng đứng (Ox) của phương trình này vì nó chứa phản lực của mặt đất mà ta không biết; chiếu lên trục nằm ngang (Oy) ta có :

$$M\ddot{y} = N\sin\theta - T\cos\theta - ky - ky$$

(Chú ý dấu của các tác động tiếp xúc giữa $\mathcal{D}$ và $\mathcal{S}$: đừng quên áp dụng định luật tác dụng và phản tác dụng).

Tổng hợp những phương trình khác nhau sao cho khử được α, T và N, ta có :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(a-b)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - m\ddot{y}\cos\theta \\ M\ddot{y} = m\sin\theta\left(g\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta + (a-b)\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\cos\theta(a-b)\ddot{\theta} - 2ky \end{cases}$$

2) Giả thiết θ nhỏ, $M = m$, $a = 3b$ và $\frac{k}{m} = \frac{g}{b} = \omega^2$, hai phương trình trên được rút gọn thành $3b\ddot{\theta} = -\omega^2 b\theta - \ddot{y}$ và $\ddot{y} = b\omega^2\theta + b\ddot{\theta} - 2\omega^2 y$.

3) a) *Các nghiệm* $\begin{vmatrix} \theta = \theta_0 \cos(\Omega t + \varphi) \\ y = y_0 \cos(\Omega t + \varphi) \end{vmatrix}$ *là thích hợp nếu :*

$$(-3b\Omega^2 + b\omega^2)\theta_0 - \Omega^2 y_0 = 0$$

$$(-b\Omega^2 + b\omega^2)\theta_0 + (-2\omega^2 + \Omega^2)y_0 = 0.$$

Hệ hai phương trình tuyến tính và đồng nhất này có hai nghiệm θ_0 và y_0 khác không nếu định thức của chúng bằng không, từ đó ta có :

$$(\omega^2 - 3\Omega^2)(\Omega^2 - 2\omega^2) + \Omega^2(\omega^2 - \Omega^2) = 0$$

Giải phương trình bậc hai đối với Ω^2, ta được :

$$\Omega^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\omega^2$$

Các giá trị Ω tương ứng được gọi là vận tốc góc riêng của hệ.

Chú ý :

Thí dụ có thể có được các nghiệm kiểu này với các điều kiện đầu như sau :

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad y = b\frac{\omega^2 - 3\Omega^2}{\Omega^2}\theta_0 \text{ và } \dot{y} = 0$$

để thỏa mãn các phương trình trên (với $\varphi = 0$).

Đối với Ω_1 xác định bởi $\Omega_1^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\omega^2$;

$$y_0 = y_{01} = -\frac{3\sqrt{2}+4}{2+\sqrt{2}}\theta_0 \text{ và } \Theta_o \text{ có dấu ngược nhau.}$$

Đối với Ω_2 xác định bởi $\Omega_2^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\omega^2$

$$y_0 = y_{02} = \frac{3\sqrt{2}-4}{2+\sqrt{2}}\theta_0 \text{ và } \theta_0 \text{ có cùng dấu.}$$

b) *Điều kiện lăn không trượt của $\mathscr{D}$ và $\mathscr{S}$ là được bảo đảm ở mọi thời điểm, nếu $|T| \leq f N$ với*

$$\begin{vmatrix} N = mg \\ T = -mb\ddot{\theta} = mb\Omega^2\theta \end{vmatrix}$$

Vậy θ_0 phải nghiệm đúng $|\theta_0| \leq \frac{f g}{b\Omega^2}$.

SỰ QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

6

Mở đầu

Rôto của động cơ, bánh xe, mà cả cái cửa, tay nắm ở cửa, con lắc, kim đồng hồ, ... đều là những thí dụ về vật rắn quay quanh một trục.

Như đã nói rõ trong chương trình chúng ta giới hạn nghiên cứu trường hợp đặc biệt ở đấy trục quay giữ theo một hướng cố định trong quá trình chuyển động của vật rắn (như vậy là không đặt vấn đề nghiên cứu chuyển động quay của bánh xe khi lái ngoặt !)

Nếu trục quay không phải cố định trong hệ quy chiếu nghiên cứu (thí dụ hệ quy chiếu trái đất) ta luôn luôn có thể chọn một hệ quy chiếu (hệ quy chiếu trọng tâm hay một hệ quy chiếu nào khác) trong đó trục quay cố định : đó là lí do mà trong chương này ta chỉ giới hạn nghiên cứu vật rắn quay quanh trục cố định.

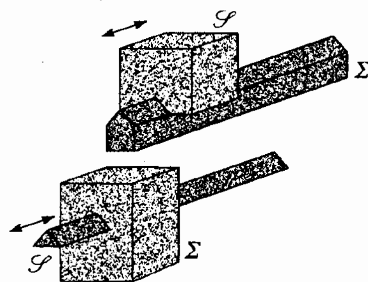
MỤC TIÊU

- Phân tích các tác động cơ lên trục quay.
- Trường hợp liên kết trụ quay (hay liên kết quay) hoàn chỉnh.

ĐIỀU CẦN BIẾT TRƯỚC

- Các định lí cơ bản về động lực của hệ.
- Động học vật rắn.
- Tác động tiếp xúc giữa các vật rắn.

1 Mô tả một vài liên kết cổ điển giữa các vật rắn



H.1. *Thí dụ về liên kết trượt.*

Ta hãy xét đến đôi điều chỉ dẫn về các liên kết đơn giản giữa hai vật rắn $\mathscr{S}$ và Σ và đặc biệt nhấn mạnh đến liên kết trụ quay cho phép $\mathscr{S}$ quay quanh một trục cố định của Σ.

Một liên kết được gọi là hoàn chỉnh, nghĩa là không có ma sát, nếu công suất tổng cộng các tác động cơ tiếp xúc (tiếp xúc của Σ lên $\mathscr{S}$ và của $\mathscr{S}$ lên Σ) là bằng không.

(Ta nhớ rằng công suất này không phụ thuộc vào hệ quy chiếu mà ta tính).

Để đơn giản hóa cách trình bày và trong thực tiễn thường là như vậy, chúng ta, dùng hệ quy chiếu $\mathscr{R}_\Sigma$ gắn liền với Σ và cho Σ vai trò giá đỡ để $\mathscr{S}$ dịch chuyển trên đó. Chú ý rằng trong hệ quy chiếu đó, các tác động cơ của $\mathscr{S}$ lên Σ không làm việc vì Σ là cố định.

Công suất của các tác động cơ tiếp xúc của Σ lên $\mathscr{S}$ được viết với các kí hiệu thông thường :

$$\mathscr{P}_{\text{tiếp xúc}} = \vec{R}.\vec{v}(A_{\mathscr{S}})/\mathscr{R}_\Sigma + \vec{\mathscr{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}}.\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\mathscr{R}_\Sigma}.$$

$A_{\mathscr{S}}$ kí hiệu một điểm bất kì gắn liền với $\mathscr{S}$ ($A_{\mathscr{S}}$ có thể là tiếp xúc với một điểm của Σ).

1.1. Liên kết trượt hay liên kết kiểu lăng trụ

Hai vật rắn $\mathscr{S}$ và Σ giữa chúng có liên kết trượt nếu chuyển động duy nhất của $\mathscr{S}$ đối với Σ là chuyển động tịnh tiến thẳng song song với một trục gắn liền với Σ.

Liên kết trượt (*h.*1) là hoàn chỉnh (không ma sát trượt) nếu tổng hợp lực $\vec{R}$ của toocsơ đặc trưng cho các tác động tiếp xúc của Σ lên $\mathscr{S}$ là vuông góc với phương dịch chuyển của $\mathscr{S}$ lên Σ, phù hợp với các định luật COULOMB.

$\mathscr{S}$ tịnh tiến trong R_Σ, tất cả các điểm của $\mathscr{S}$ có cùng vận tốc, bằng vận tốc trượt $\vec{v}_g$ của $\mathscr{S}$ lên Σ. Ta có thể nghiệm lại rằng công suất của các tác động cơ tiếp xúc của Σ lên $\mathscr{S}$ thực hiện là bằng không :

$$\mathscr{P}_{\text{tiếp xúc}} = \vec{R}.\vec{v}_{\mathscr{S}/\mathscr{R}_\Sigma} = \vec{R}.\vec{v}_g = 0 (\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\mathscr{R}_\Sigma} = \vec{0})$$

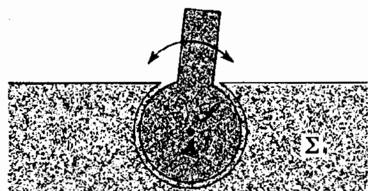
1.2. Liên kết khớp cầu hay liên kết cầu

Giữa $\mathscr{S}$ và Σ có liên kết khớp cầu nếu chuyển động duy nhất của $\mathscr{S}$ đối với Σ là chuyển động quay quanh một điểm *A* gắn với Σ.

Liên kết khớp cầu (*h.*2) là hoàn chỉnh (không ma sát) nếu momen $\vec{\mathscr{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}}$ đối với *A* của các tác động cơ tiếp xúc của Σ lên $\mathscr{S}$ là bằng không : lúc đó các tác động cơ tiếp xúc này rút gọn lại thành một lực đơn giản (đúng thực là một glitsơ) đi qua *A*.

Ta nghiệm ra rằng công suất của các tác động cơ của Σ lên $\mathscr{S}$ thực tế là bằng không trong $\mathscr{R}_\Sigma$ vì :

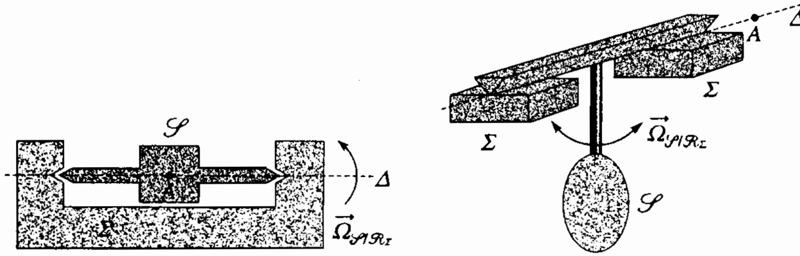
$$\mathscr{P}_{\text{tiếp xúc}} = \vec{\mathscr{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}}.\vec{\Omega}_{\mathscr{S}/\mathscr{R}_\Sigma} = 0 \qquad (\vec{v}(A_{\mathscr{S}}) = \vec{0}).$$

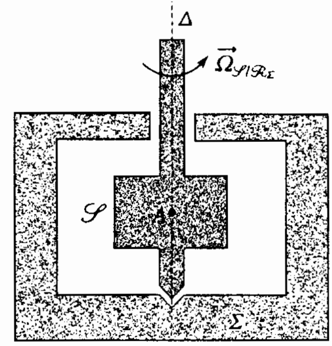


H.2. *Thí dụ về liên kết khớp cầu : A là tâm của hình cầu chung ở $\mathscr{S}$ và ở Σ*

1.3. Liên kết trụ quay hay liên kết quay

Giữa $\mathcal{S}$ và Σ có liên kết trụ quay nếu chuyển động duy nhất có thể có của $\mathcal{S}$ đối với Σ là một chuyển động quay quanh một trục A, gắn liền với Σ.





H.3. *Các thí dụ về liên kết trụ quay.*

Liên kết trụ quay (*h*.3) là hoàn chỉnh (không ma sát) nếu thành phần theo trục quay của momen đối với điểm A của các tác động tiếp xúc với Σ lên $\mathcal{S}$ là bằng không. Trong những điều kiện này, công suất của các tác động cơ tiếp xúc của Σ lên $\mathcal{S}$ thực sự là bằng không.

$$\mathcal{P}_{\text{tiếp xúc}} = \vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_\Sigma} = 0$$

vì $\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}} \perp \vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}_\Sigma}$ và $\vec{v}(A_{\mathcal{S}}) = \vec{0}$

Áp dụng 1

Một liên kết trụ quay hoàn chỉnh

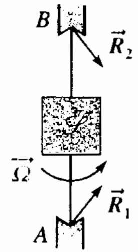
Vật rắn $\mathcal{S}$ được giữ bởi hai trụ quay gần như là điểm ở A và B sao cho nó thể quay quanh trục cố định (AB) trong hệ quy chiếu nghiên cứu. Ta giả thiết rằng các liên kết ở A và B là hoàn chỉnh : các tác động tiếp xúc mà $\mathcal{S}$ tác dụng lên A và B tương ứng rút về còn hai lực : $\vec{R}_1$ đi qua A và $\vec{R}_2$ đi qua B.

Tính các phần tử rút gọn ở A của toocsơ các tác động cơ tiếp xúc lên $\mathcal{S}$.

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \ ;$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2 .$$

Ta nhận xét rằng $\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}}$ là khá vuông góc với trục quay (AB) của vật rắn $\mathcal{S}$; liên kết là hoàn chỉnh.

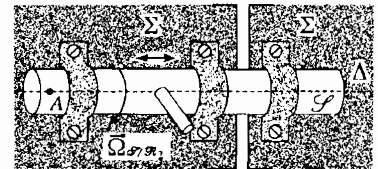


H.4. *Các tác động tiếp xúc ở A và B.* ▶

1.4. Liên kết trụ quay trượt hay là liên kết chốt kéo

Giữa $\mathcal{S}$ và Σ có liên kết trụ quay trượt nếu các chuyển động duy nhất có thể có của $\mathcal{S}$ đối với Σ là một chuyển động tịnh tiến thẳng song song với trục gắn liền với Σ và một chuyển động quay quanh trục đó.

Liên kết trụ quay trượt (*h*.5) là hoàn chỉnh (không ma sát) nếu tổng hợp $\vec{R}$ và momen $\vec{\mathcal{M}}_{A,\text{ tiếp xúc}}$ tại một điểm của trục quay là vuông góc với trục quay.

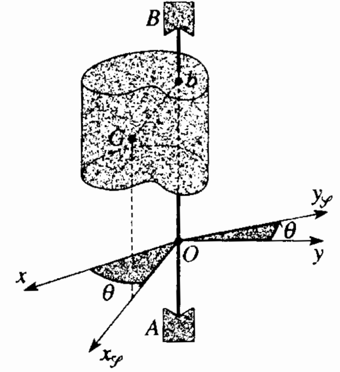


H.5. *Thí dụ về liên kết trụ quay trượt.*

2 Nghiên cứu chuyển động quay (liên kết trụ quay)

2.1. Áp dụng các định lí cơ bản

Trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}(O;\, x,\, y,\, z)$, ta giả thiết rằng vật rắn $\mathcal{S}$ có chuyển động quay quanh trục (Oz) **không ma sát.**



H.6. *$\mathcal{S}$ quay quanh trục (Oz).*

Xét hệ quy chiếu $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(O\,;x_{\mathcal{S}}, y_{\mathcal{S}}, z)$ gắn với vật rắn sao cho quán tâm G của $\mathcal{S}$ nằm trong mặt $(Ox_{\mathcal{S}}z)$.

Chuyển động quay của vật rắn $\mathcal{S}$ trong $\mathcal{R}$, hoàn toàn như là chuyển động quay của $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ trong $\mathcal{R}$, được đặc trưng bởi góc $\theta = (\overrightarrow{Ox},\, \overrightarrow{Ox_{\mathcal{S}}})$.

$\mathcal{S}$ chịu tác dụng của :

• các tác động cơ tiếp xúc mà các trụ tác dụng lên trục quay :

– tổng hợp lực : $\vec{R}$;

– mômen ở O : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,\,\text{tiếp xúc}} \perp \overrightarrow{Oz}$ (vì không có ma sát) ;

• các tác động cơ khác với tác động cơ tiếp xúc và một cách tiên nghiệm là biết được chúng (như là trọng lượng, ngẫu lực động cơ, lực quán tính nếu $\mathcal{R}$ không phải là galilé...) xác định bởi :

– tổng hợp lực : $\vec{F}$;

– momen đối với O : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$

Chúng ta sẽ chọn cơ sở cho phép chiếu là cơ sở $(\vec{e}_{x\mathcal{S}},\, \vec{e}_{y\mathcal{S}},\, \vec{e}_z)$ gắn với $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$.

<u>*Chú ý :*</u>

Việc chọn cơ sở này không phải là không chủ ý. Thật vậy, tất cả cơ sở để chiếu khác luôn dẫn đến những phép tính phức tạp hơn (để thấy rõ điều này, chỉ cần dùng một cơ sở để chiếu khác, thí dụ cơ sở gắn với hệ quy chiếu $\mathcal{R}$: chiếu các vectơ và so sánh kết quả đó với những kết quả có được dưới đây).

Vận dụng trong $\mathcal{R}$ định lí tổng hợp động lực đối với vật rắn $\mathcal{S}$ có khối lượng m : $\quad \vec{S} = m\vec{a}(G) = \vec{F} + \vec{R}$.

Ta kí hiệu a và b là các tọa độ của G trong cơ sở $(\vec{e}_{x\mathcal{S}},\, \vec{e}_{y\mathcal{S}},\, \vec{e}_z)$, ta được $\overrightarrow{OG} = a\vec{e}_{x\mathcal{S}} + b\vec{e}_z$, từ đó $\vec{P} = m\vec{v}(G) = ma\dot{\theta}\,\vec{e}_{y\mathcal{S}}$ và lấy đạo hàm :

$$\vec{S} = m\vec{a}(G) = -ma\dot{\theta}^2\,\vec{e}_{y\mathcal{S}} + ma\ddot{\theta}\,\vec{e}_{y\mathcal{S}}$$

Ta suy ra từ đó : $\begin{cases} -ma\,\dot{\theta}^2 = F_{x\mathcal{S}} + R_{x\mathcal{S}} \\ ma\,\ddot{\theta} = F_{y\mathcal{S}} + R_{y\mathcal{S}} \\ 0 = F_z + R_z \end{cases}$

Vận dụng trong $\mathcal{R}$ định lí momen động lượng cho vật rắn $\mathcal{S}$ đối với O :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{D}_O = \vec{\mathcal{M}}_{O,\,\text{tiếp xúc}} + \vec{\mathcal{M}}_O.$$

Phân tích các momen động lượng $\vec{L}_O$ và động lực $\vec{D}_O$ thành một thành phần song song với trục (Oz) và một thành phần vuông góc với trục này. Đưa vào momen quán tính J của vật rắn $\mathcal{S}$ đối với trục quay (Oz) (xem chương 2) ta có :

$$\vec{L}_O = L_{Oz}\,\vec{e}_z + \vec{L}_{O\perp} = J\dot{\theta}\,\vec{e}_z + \vec{L}_{O\perp} \quad \text{vì} \quad L_{Oz} = J\dot{\theta}\,;$$

$$\vec{D}_O = D_{Oz}\,\vec{e}_z + \vec{D}_{O\perp} = J\ddot{\theta}\,\vec{e}_z + \vec{D}_{O\perp},$$

với $\left(\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = D_{Oz} = J\ddot{\theta}$ và $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{O\perp}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{D}_{O\perp}$.

Cũng vậy, ta phân tích momen của các tác động cơ thành một thành phần song song với trục (Oz) và một thành phần vuông góc với trục đó :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \mathcal{M}_{Oz}\vec{e}_z + \vec{\mathcal{M}}_{O\perp},$$

$\vec{\mathcal{M}}_{O,\text{tiếp xúc}} = \vec{\mathcal{M}}_{O\perp,\text{tiếp xúc}}$, vì $\vec{\mathcal{M}}_{O,\text{ tiếp xúc}} \perp \overrightarrow{Oz}$.

Như vậy ta được : $\left(\dfrac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = D_{Oz} = J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}$;

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_{O\perp}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \vec{D}_{O\perp} + \vec{\mathcal{M}}_{O\perp} + \vec{\mathcal{M}}_{O\perp,\text{tiếp xúc}}.$$

2.2. Nghiên cứu chuyển động

Nếu chúng ta tìm cách xác định quy luật $\theta = \theta(t)$ chi phối sự quay của $\mathcal{S}$ quanh (Oz) , không cần viết tất cả các phương trình trên. Chỉ cần vận dụng trong $\mathcal{R}$ định lí momen động lượng, chiếu lên trục quay :

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = D_{Oz} = J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz},$$

nó cho ta trực tiếp phương trình vi phân của θ, mà không xuất hiện các phản lực chưa biết của các trục **khi liên kết trụ quay là liên kết hoàn chỉnh**. Phương trình này có thể dễ tìm lại được khi vận dụng định lí công suất động năng vào vật rắn $\mathcal{S}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_K}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) = \mathcal{P}_{\text{tiếp xúc}} + \mathcal{P}_{\text{khác}}$$

$\mathcal{P}_{\text{tiếp xúc}} = 0$, vì liên kết là hoàn chỉnh và :

$$\mathcal{P}_{\text{khác}} = \vec{F}.\vec{v}(O) + \vec{\mathcal{M}}_O.\dot{\theta}\vec{e}_z = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta},$$

ước lược cho $\dot{\theta}$, ta có : $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}$.

Áp dụng 2

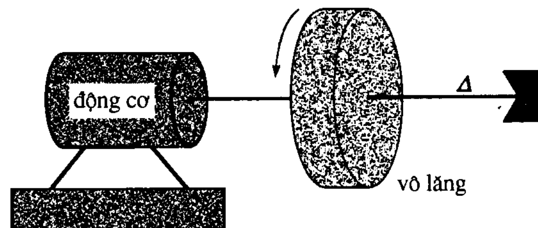
Vô lăng quán tính

Một vô lăng quán tính, xem như là một hình trụ đồng nhất trục Δ và momen J đối với trục Δ, có thể quay bởi hai động cơ (h.7) :

- *một động cơ chính công suất lớn làm cho vô lăng khởi động quay khi vô lăng đang đứng yên ;*
- *một động cơ phụ bảo đảm cho vô lăng quay với tốc độ gần như đều ω_0 khi vô lăng đã được khởi động.*

1) *Cho vô lăng quay. Bỏ qua tất cả ma sát.*

a) *Thừa nhận rằng động cơ chính có cùng công suất $\mathcal{P}$ đối với mọi vận tốc quay, tính thời gian t_1 cần thiết để vô lăng ban đầu đứng yên, sau đó quay với tốc độ ω_0.*



H.7. *Sự quay của vô lăng quán tính.*

b) Thừa nhận rằng động cơ chính thực hiện một ngẫu lực có momen không đổi tương ứng với công suất $\mathcal{P}$ như khi vô lăng có vận tốc ở chế độ làm việc ω_0, tính thời gian t_2 cần thiết để làm cho vô lăng quay trong những điều kiện đó. So sánh t_1 và t_2.

2) Vô lăng đã đạt tốc độ ở chế độ làm việc ω_0, người ta cắt động cơ chính. Động cơ phụ lúc đó chạy tiếp để tránh cho vô lăng dừng lại vì không thể tránh khỏi có ma sát ở ổ trục.

Xem rằng ma sát đó tương đương với ngẫu lực có momen không đổi $-C_1$ (đối với trục quay) và động cơ thực hiện một ngẫu lực có momen $C(t) = C_1 + C_2 \cos \Omega t$ (C_2 và Ω không đổi), xác định chuyển động quay của hình trụ.

1) a) Công suất $\mathcal{P}$ mà vô lăng nhận được là không đổi ở mọi lúc (cho dù vận tốc ω của vô lăng là bao nhiêu cũng vậy) áp dụng định lí động năng cho vô lăng, giữa thời điểm đầu ($\omega = 0$) và thời điểm mà vô lăng đạt vận tốc ở chế độ làm việc ω_0, ta được :

$$\frac{1}{2} J\omega_0^2 = \mathcal{P} t_1$$

b) Chính từ bây giờ mômen C_0 của ngẫu lực động cơ là không đổi ở mọi thời điểm. Vận dụng định lí momen động lượng cho vô lăng, chiếu xuống trục quay:

$$J\dot{\omega} = C_0, \text{ với } C_0\omega_0 = \mathcal{P},$$

từ đó, lấy tích phân : $J\omega_0 = C_0 t_2$ và $t_2 = 2t_1$.

Vậy để làm cho vô lăng quay một cách nhanh nhất có thể được, tốt hơn cả là cho thao tác một hay nhiều biến tốc để công suất của động cơ kéo vô lăng được sử dụng tốt hơn ; chính đó là điều mà người lái ô tô làm khi khởi động ô tô.

2) Định lí momen động lượng khi chiếu lên trục quay cho ta :

$$J\dot{\omega} = -C_1 + C_1 + C_2 \cos \Omega t,$$

từ đó ta suy ra vận tốc quay của vô lăng :

$$\omega = \frac{C_2}{J\Omega} \sin \Omega t + \omega_0 .$$

(nếu ta lấy gốc thời gian là thời điểm mà động cơ phụ bắt đầu chạy).

Ta nhận xét rằng như vậy biến thiên $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$ của vận tốc vô lăng càng nhỏ khi momen quán tính J của vô lăng càng lớn.

Ta còn phải bố trí sao cho tần số $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ của ngẫu lực động cơ không quá nhỏ.

▶ **Để luyện tập : Bài tập 1, 2 và 3.**

2.3. Các tác động cơ tiếp xúc

Khi đã biết quy luật $\theta = \theta(t)$, có thể xác định các tác động cơ tiếp xúc $(\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_{O,\text{ tiếp xúc}})$ từ các phương trình trên ; *áp dụng 3* dưới đây cho ta thấy điều đó.

Áp dụng 3

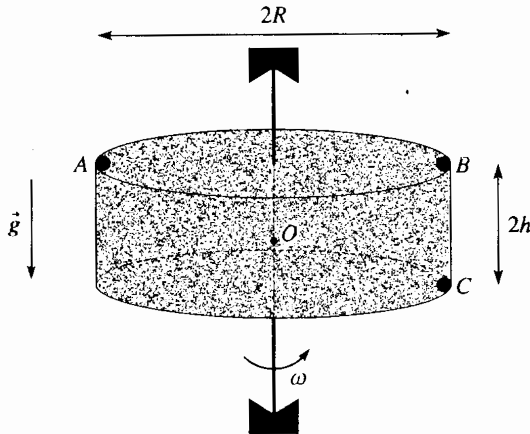
Sự quay quanh trục của hình trụ có dẳn

Trên một hình trụ đồng nhất tâm O, khối lượng M, bán kính R và momen quán tính $J = \frac{1}{2}MR^2$ so với trục (Oz) của hình trụ, có ba tăng tải điểm giống nhau A, B, và C khối lượng m như vẽ ở hình 8 (A, B và C là cùng trong một mặt phẳng đi qua trục hình trụ). Hình trụ quay với vận tốc không đổi ω quanh trục thẳng đứng của nó, trục này cố định trong hệ quy chiếu trái đất xem là Galilê. Tất cả các liên kết được xem như không có ma sát.

1) *Có cần phải có một động cơ để kéo hệ giữ cho vận tốc không đổi ?*

2) a) *Tính tổng hợp lực và momen đối với O của các tác động cơ liên kết tác dụng lên vật rắn.*

b) *Các kết quả này sẽ ra sao nếu ta bỏ tăng tải ở C ?*



H.8. *Sự quay của hình trụ có dằn.*

Ta có thể lấy lại các kết quả của *bài tập* 6 *chương* 2, ở đây ta có thể xem cơ sở để chiếu $(O\,;\vec{e}_{x\mathcal{G}},\vec{e}_{y\mathcal{G}},\ \vec{e}_z)$ gắn liền với vật rắn sao cho mặt $(O\,;\ \vec{e}_{x\mathcal{G}},\vec{e}_z)$ trùng với mặt (ABC), rõ ràng là mặt đó có chứa quán tâm G của vật rắn. Ta đã tìm được :

$$\vec{P} = mR\omega\vec{e}_{y\mathcal{G}},$$

$$\vec{L}_0 = (J+3mR^2)\omega\vec{e}_z + mRh\omega\vec{e}_{x\mathcal{G}},$$

rồi ta lấy đạo hàm :

$$\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -mR\omega^2\vec{e}_{x\mathcal{G}},$$

$$\vec{D}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = mRh\omega^2\vec{e}_{y\mathcal{G}} = \vec{D}_{O\perp}$$

1) Ngoài các tác động cơ tiếp xúc, vật rắn còn chịu :

- tác dụng của trọng lượng của nó mà thành phần momen lên trục (Oz) là bằng không ;
- tùy lúc, tác dụng của ngẫu lực động cơ có momen $C\vec{e}_z$.

Ở đây định luật chuyển động cho ta :

$$D_{Oz} = 0 \text{ , từ đó } C = 0$$

Vậy không cần thiết dùng một động cơ để duy trì cho vận tốc của hệ không đổi.

2) a) Sử dụng lại các kí hiệu ở trên, có thể viết các phương trình khác :

$$\begin{cases} -mR\omega^2 = R_{x\mathcal{G}} \\ 0 = R_{y\mathcal{G}} \\ 0 = -(M+3m)g + R_z \end{cases}$$

và $mRh\omega^2\vec{e}_{y\mathcal{G}} = Rmg\vec{e}_{y\mathcal{G}} + \mathcal{M}_{O\perp,\text{ tiếp xúc}}$

Ta nhận xét rằng các tác động cơ tiếp xúc phụ thuộc vào vận tốc quay ω của vật rắn.

b) Khi bỏ tăng tải ở C, ta có :

$$\vec{P} = \vec{0} \text{ và } \vec{S} = \vec{0}$$

Quán tâm G của hệ nằm trên trục quay, từ đó :

$$\vec{R} = -(M+2m)\vec{g}\ ;$$

$$\vec{L}_O = (J+2mR^2)\vec{\omega} \text{ và } \vec{D}_O = \vec{0}$$

Momen động lượng là đồng tuyến với trục quay và ta có thể nghiệm ra rằng :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,\text{ tiếp xúc}} = \vec{\mathcal{M}}_{O\perp,\text{ tiếp xúc}} = \vec{0}$$

Bây giờ ta tìm thấy rằng các tác động cơ tiếp xúc không còn phụ thuộc vào vận tốc quay ω của vật rắn nữa.

Áp dụng 3 cho chúng ta thấy rằng các tác động tiếp xúc có thể thay đổi theo bình phương của vận tốc quay, chỉ trừ khi trục quay trùng với một trục đối xứng của hệ (đó là trường hợp bỏ tăng tải ở C).

Kết quả trên đây là tổng quát. Như vậy nếu vật rắn quay với tốc độ nhanh (trường hợp rôto trong máy đang quay), các tác động tiếp xúc có thể có những giá trị rất lớn và gây ra những dao động có hại trong máy và đôi khi làm xoắn trục quay.

Do đó, khi chế tạo một máy, người ta cố gắng thực hiện kì được sao cho trục đối xứng của rôto trùng với trục quay để có :

$\vec{S} = \vec{0}$ và $\vec{D}_O = \vec{0}$, khi máy quay với vận tốc không đổi.

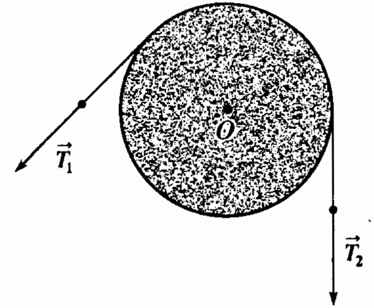
Trong trường hợp này, các tác động cơ tiếp xúc không còn phụ thuộc vào vận tốc quay của máy nữa mà có các giá trị đều là như nhau máy có quay hay không có giá trị vẫn thế.

Với cùng một mục đích, đôi khi người ta gắn vào bánh xe ôtô những quả tải nhỏ khi bánh xe bị kém cân bằng.

<u>*Chú ý :*</u>

Khi quán tâm của một máy quay nằm trên trục quay, người ta nói là máy đạt cân bằng tĩnh.

Khi momen động lượng $\vec{L}_O$ *của một máy quay là đồng tuyến với trục quay, người ta nói là máy* cân bằng động lực.



H.9. *Các lực căng của một sợi dây quấn quanh ròng rọc.*

3 Các thí dụ

Trong những thí dụ dưới dây ta sẽ ở trong hệ quy chiếu trái đất giả thiết là galilé.

3.1. Ròng rọc

Ròng rọc là một vật rắn quay quanh một trục và có chỗ lõm để dây có thể quấn quanh (hình 9).

Giả sử rằng ròng rọc quay không ma sát quanh trục của nó và dây có khối lượng không đáng kể. Định lí momen động lượng đối với trục quay được viết theo chuyển động quay thông thường : $J\ddot{\theta} = r(T_1 - T_2)$.

Các lực căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$ của dây ở bên này và bên kia của ròng rọc là như nhau nếu ta bỏ qua khối lượng ròng rọc (vì trong trường hợp này $J \approx 0$).

3.2. Con lắc

Vật rắn có khối lượng m, quán tâm G chuyển động không ma sát quanh trục nằm ngang (Oz) (*hình* 10). Định lí về momen động lượng đối với trục (Oz) cho ta :

$$J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta$$

với a là khoảng cách từ G đến trục quay.

Phương trình vi phân của con lắc ở trên đã được nghiên cứu ở năm thứ nhất (*xem H–Prépa, Cơ học I, năm thứ nhất*). Khi θ nhỏ, ta có thể tuyến tính hóa phương trình này để có $J\ddot{\theta} = -mga\theta$ mà nghiệm của nó là dao động hình sin có chu kì là $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mga}}$.

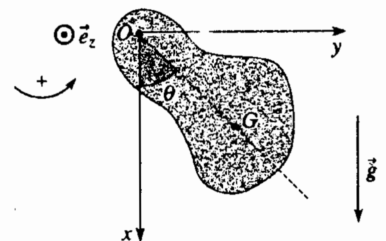
Ta nhận thấy rằng chu kì T_0 không phụ thuộc biên độ θ_0 của các dao động "nhỏ" : người ta nói rằng có sự **đẳng thời** của các dao động nhỏ.

Khi θ không còn nhỏ nữa, ta nhân hai vế của phương trình chuyển động cho $\dot{\theta}$ và lấy tích phân phương trình có được trong khoảng từ θ_0 (vị trí mà $\dot{\theta} = 0$) và θ:

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mga(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Ta nhận ra ở đây là nguyên hàm của năng lượng. Ta có thể tính chu kì T của các dao động của con lắc bằng cách tách biến số và lấy tích phân phương trình có được trong khoảng từ 0 đến θ_0 (tức là theo một phần tư chu kì).

$$T = 4\sqrt{\frac{J}{2mga}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = T_0\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$



H.10. *Dao động của con lắc.*

Đặt $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\varphi \sin\frac{\theta_0}{2}$, φ biến thiên giữa 0 và $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cos^2\varphi \ ; \quad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\, d\varphi .$$

Từ đó suy ra : $T = T_0 \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$.

Nếu biên độ θ_0 không phải là thật lớn, ta có thể khai triển có giới hạn biểu thức trên đối với θ_0 và có được giá trị gần với T :

$$T = T_0\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{8}\sin^2\varphi\right)d\varphi, \text{ vậy } T = T_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

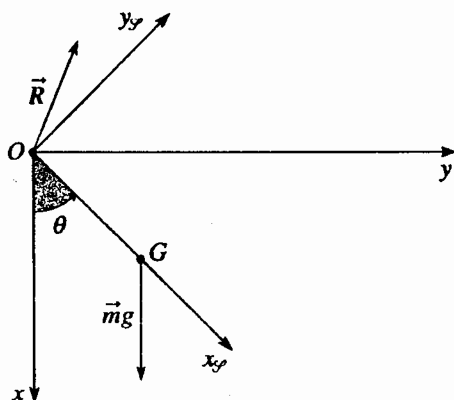
Chu kì T phụ thuộc vào biên độ θ_0 của các dao động. Khi $\theta_0 = 30^\circ$, ta phạm sai số tương đối là :

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T-T_0}{T_0} = \frac{\theta_0^2}{16} = 1{,}7\% \text{ nếu xem } T \text{ là } T_0 .$$

Áp dụng 4

Tác động của trục lên con lắc

Con lắc đã nói trước đây có thể quay tự do quanh trục nằm ngang (Oz). Nó được thả ra không vận tốc đầu từ vị trí $\left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$. Tính theo θ cường độ tổng hợp $\vec{R}$ của các tác động cơ tiếp xúc thực hiện lên trục quay của con lắc. Với giá trị nào của θ cường độ đó là cực đại?



H.11. *Phản lực $\vec{R}$ lên con lắc.*

Định lí tổng hợp động lực khi chiếu lên cơ sở $(\vec{e}_{x\mathscr{P}}, \vec{e}_{y\mathscr{P}}, \vec{e}_z)$ gắn liền với con lắc (sao cho G nằm trên trục $(Ox_{\mathscr{P}})$) ($h.11$) cho ta :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = R_{x\mathscr{P}} + mg\cos\theta \\ ma\ddot{\theta} = R_{y\mathscr{P}} - mg\sin\theta \\ 0 = R_z \end{cases}.$$

Biết rằng :

$$J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta \text{ và } \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = mga\cos\theta ,$$

ta rút ra các thành phần của phản lực $\vec{R}$ trên cơ sở $(\vec{e}_{x\mathscr{P}}, \vec{e}_{y\mathscr{P}}, \vec{e}_z)$:

$$R_{x\mathscr{P}} = -mg\cos\theta\left(2\frac{ma^2}{J}+1\right)$$

$$R_{y\mathscr{P}} = mg\sin\theta\left(-\frac{ma^2}{J}+1\right),$$

từ đó, xét môđun :

$$\|\vec{R}\| = mg\sqrt{3\frac{ma^2}{J}\left(2+\frac{ma^2}{J}\right)\cos^2\theta + \left(1-\frac{ma^2}{J}\right)^2}$$

$\|\vec{R}\|$ là cực đại khi $\theta = 0$ và bằng :

$$\|\vec{R}\| = mg\left(\frac{2ma^2}{J}+1\right).$$

3.3. Bảo toàn momen động lượng đối với trục quay

Khi các tác động cơ ngoại thực hiện lên một hệ quay quanh một trục cố định, có momen là không so với trục đó, momen động lượng của hệ đối với trục quay được bảo toàn trong hệ quy chiếu đang nghiên cứu.

Áp dụng 5

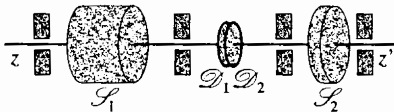
Làm cho vôlăng chuyển động nhờ rôto

Một rôto $\mathcal{S}_1$ và một vô lăng $\mathcal{S}_2$ có thể quay không ma sát quanh một trục chung nằm ngang (zz'). $\mathcal{S}_1$ quay với vận tốc đều ω_0 và $\mathcal{S}_2$ cố định. Người ta kí hiệu J_1 và J_2 là các momen quán tính đối với (zz') của $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ tương ứng.

Ở một thời điểm cho trước, người ta cho tiếp xúc hai đĩa $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$ gắn chặt tương ứng với $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$. Sau một thời gian nhất định nào đó, do ma sát giữa $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$ rôto và vôlăng quay với cùng vận tốc ω.

1) *Xác định ω.*

2) *Xác định năng lượng tổng cộng giữa thời điểm đầu và thời điểm cuối.*



H.12. *$\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ quay.*

Ta xét hệ $(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)$ gồm rôto và vôlăng.

1) Momen các tác động cơ ngoại so với trục quay là bằng không, momen động lượng của $(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)$ đối với trục (zz') giữ không đổi trong quá trình chuyển động, từ đó :

$$\omega = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\omega_0 .$$

2) Vận dụng định lí về động năng đối với hệ $(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)$ giữa thời điểm đầu lúc đó $\mathcal{S}_1$ có vận tốc ω_0, $\mathcal{S}_2$ đứng yên và thời điểm cuối, lúc mà hai vật rắn có cùng vận tốc.

$$\frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 - \frac{1}{2}J_1\omega_0^2 = W_{\text{ma sát}}$$

(công của các tác động ma sát ở đây là một công nội) vậy :

$$-\frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}\omega_0^2 = W_{\text{ma sát}} .$$

Ta nhận thấy ở đây rõ ràng là công của các tác động ma sát là âm.

ĐIỀU CẦN GHI NHỚ

■ LIÊN KẾT GIỮA HAI VẬT RẮN

• Liên kết giữa hai vật rắn được gọi là hoàn chỉnh nếu công suất tổng cộng của các tác động cơ tiếp xúc (tác động của Σ lên $\mathcal{S}$ và tác động của $\mathcal{S}$ lên Σ) là bằng không trong quá trình chuyển động của $\mathcal{S}$ và của Σ.

(Nhớ lại rằng công suất này không phụ thuộc hệ quy chiếu theo đó ta tính toán).

• Liên kết trượt hay liên kết lăng trụ

Giữa hai vật rắn $\mathcal{S}$ và Σ có liên kết trượt khi chuyển động duy nhất của $\mathcal{S}$ đối với Σ là chuyển động tịnh tiến thẳng hàng song song với một trục gắn với Σ.

• Liên kết khớp cầu hay liên kết cầu

Giữa $\mathcal{S}$ và Σ có liên kết khớp cầu khi chuyển động duy nhất của $\mathcal{S}$ đối với Σ là chuyển động quay quanh một điểm A gắn liền với Σ.

• Liên kết trụ quay hay liên kết quay

Giữa $\mathcal{S}$ và Σ có liên kết trụ quay nếu chuyển động duy nhất có thể được của $\mathcal{S}$ so với Σ là chuyển động quay quanh trục Δ gắn với Σ.

• Liên kết trụ trượt hay chốt trượt

Giữa $\mathcal{S}$ và Σ có liên kết trụ trượt nếu những chuyển động duy nhất có thể có của $\mathcal{S}$ đối với Σ là chuyển động tịnh tiến song song thẳng hàng với một trục gắn liền với Σ và chuyển động quay quanh trục đó.

■ QUAY KHÔNG MA SÁT CỦA MỘT VẬT RẮN QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH (*Oz*) (LIÊN KẾT TRỤ QUAY HOÀN CHỈNH)

• Các tác động cơ tiếp xúc mà các trụ tác dụng lên trục quay được xác định bởi :

• tổng hợp R ;

• momen đối với một điểm O của trục quay :

$$\mathcal{M}_{O,\text{ tiếp xúc}} \text{ với } \mathcal{M}_{O,\text{ tiếp xúc}} \perp Oz \text{ (vì không có ma sát trượt).}$$

• Để có định luật $\theta = \theta(t)$ chi phối chuyển động quay của $\mathcal{S}$ quanh (Oz) cố định trong hệ quy chiếu $\mathcal{R}$, cần vận dụng cho vật rắn $\mathcal{S}$, trong $\mathcal{R}$:

• định lí momen động lượng chiếu lên trục quay :

$$\left(\frac{dL_{Oz}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = D_{Oz} = J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz} ;$$

• định lí công suất động năng :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_K}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right) = \mathcal{M}_{Oz}\dot{\theta} ,$$

ước lược cho $\dot{\theta}$, từ trên ta có : $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}$.

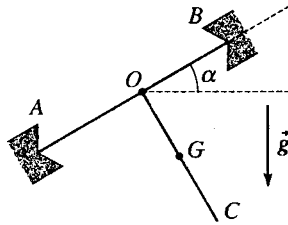
$\mathcal{M}_{Oz}$ là thành phần của momen của tất cả các tác động cơ ngoại thực hiện lên $\mathcal{S}$ (kể cả các lực quán tính nếu hệ quy chiếu $\mathcal{R}$ không phải là Galilé) không kể các tác động cơ tiếp xúc.

BÀI TẬP

ÁP DỤNG TRỰC TIẾP GIÁO TRÌNH

1 Dao động của một con lắc nghiêng

Một vật rắn $AOBC$ dạng chữ T khối lượng m và quán tâm G có thể quay không ma sát quanh trục AOB nghiêng một góc α đối với trục nằm ngang (trong hệ quy chiếu trái đất giả thiết là galilé).



Sơ đồ vẽ vật rắn cân bằng trong mặt phẳng thẳng đứng ($AO = OB$; $OG = b$). Momen quán tính của vật rắn đối với trục AOB là bằng J.

Tính chu kì T của các dao động nhỏ của con lắc quanh vị trí cân bằng của nó.

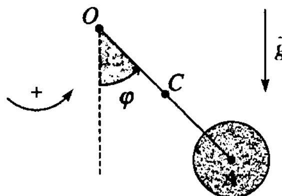
2 Daođộng của con lắc kép

Ta xét trong hệ quy chiếu galilé, một con lắc kép gồm:

• một thanh OA đồng nhất, khối lượng m, chiều dài $2R$, tâm C và momen quán tính $I = \frac{1}{3}mR^2$ đối với trục vuông góc với thanh đi qua C ;

• một đĩa đồng nhất, khối lượng m, bán kính R có tâm là A và momen quán tính $J = \frac{1}{2}mR^2$ đối với trục của nó.

Hệ có thể quay trong một mặt thẳng đứng quanh một trục nằm ngang (Oz) đi qua O song song với trục đĩa, không có ma sát.



Một cách ghép khôn khéo cho phép liên kết chặt chẽ thanh với đĩa ở A, hay ngược lại cho phép nó quay không ma sát quanh một trục song song với (Oz).

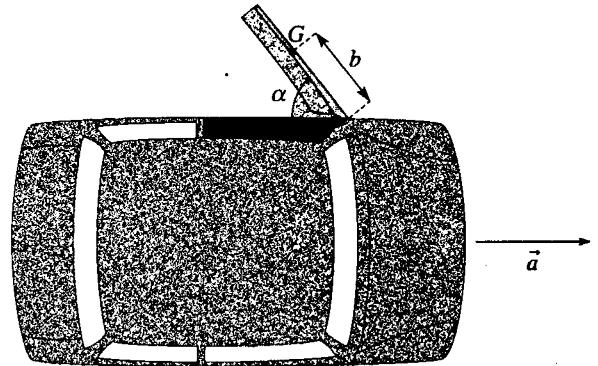
1) Đĩa và thanh liên kết chặt với nhau. Tính chu kì T_1 của những dao động nhỏ của hệ.

2) Đĩa và thanh có thể quay tự do đối với nhau. Ở thời điểm đầu, thanh đứng yên và nghiêng một góc nhỏ φ_0 so với đường thẳng đứng, đĩa có vận tốc góc ω_0.

Tính chu kì mới T_2 của những dao động nhỏ của thanh. Tốc độ ω_0 có ảnh hưởng như thế nào đối với chu kì T_2 ?

3 Đóng cánh cửa xe ôtô

Một chiếc xe ban đầu đứng yên, khi khởi động có được gia tốc a trên đường nằm ngang (hệ quy chiếu trái đất giả thiết là galilé).



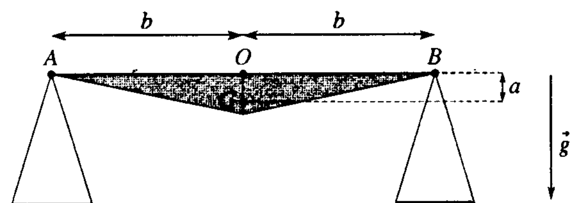
Khi khởi động, một cánh cửa của xe vẫn còn mở và tạo nên một góc $\alpha_0 = 90^o$ .Tính thời gian cần thiết để cánh cửa tự đóng lại.

Bỏ qua tất cả ma sát ; kí hiệu J là momen quán tính của cánh cửa so với trục bản lề giả thiết là thẳng đường, b là khoảng cách từ quán tâm G của cánh cửa đến trục bản lề và m là khối lượng của cánh cửa.

SỬ DỤNG VỐN KIẾN THỨC

4 Dao động của một cái cân

Sơ đồ dưới đây là sơ đồ của một cái cân tiểu li.



Đòn cân khối lượng m có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang (Oz) đi qua O (trong hệ quy chiếu trái đất xem là galilé). Quán tâm G của nó nằm cách O một khoảng là a theo đường thẳng đứng đi qua O khi đòn cân cân bằng nằm ngang.

Momen quán tính của đòn cân đối với trục đi qua G và đồng tuyến với (Oz) là bằng J.

Các đĩa cân có khối lượng M được treo ở hai mút A và B của đòn cân (các điểm, A, O và B là thẳng hàng và $OA = OB = b$). Chúng có thể quay không ma sát quanh các trục nằm ngang đi qua A và B và đồng tuyến với (Oz). Như vậy, trong quá trình chuyển động, các quán tâm của hai đĩa cân luôn luôn ở trên các đường thẳng đứng qua các điểm A và B.

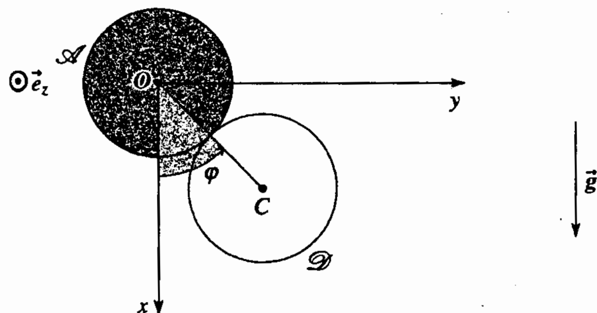
Tính chu kì T của các dao động nhỏ của hệ quanh vị trí cân bằng của nó.

5 Dao động của con lắc phức tạp

Bộ $\mathscr{S}$ vẽ ở sơ đồ gồm có :

- một thanh đồng nhất OC (khối lượng m, chiều dài $2R$, momen quán tính đối với trục (Oz) là $J = \frac{4}{3}mR^2$) có thể quay không ma sát trong mặt (Oxy) quanh trục (Oz) nằm ngang của hệ quy chiếu $(O\ ;\ x\ ;\ y\ ;\ z)$ giả thiết là galilé.
- một đĩa $\mathscr{D}$ đồng nhất (có cùng khối lượng m như thanh, tâm C, bán kính R, momen quán tính đối với trục song song (Oz) là $I = \frac{1}{2}mR^2$) nối khớp với nhau ở C trên thanh OC và có thể quay không ma sát trong mặt (Oxy) quanh trục đi qua C, đồng tuyến với (Oz).

Trong quá trình chuyển động của $\mathscr{S}$, $\mathscr{D}$ lăn không trượt trên một hình trụ $\mathscr{A}$ cố định trong $(O\ ;\ x,\ y,\ z)$ trục (Oz) và bán kính R.



1) Thiết lập phương trình vi phân của độ nghiêng $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$ của hệ này.

2) Người ta kéo thanh OC cho nghiêng một góc nhỏ φ_0 và buông ra không có tốc độ ban đầu.

Tính chu kì T của những dao động nhỏ của $\mathscr{S}$.

6 Chuyển động của bộ biến tốc kiểu mâm

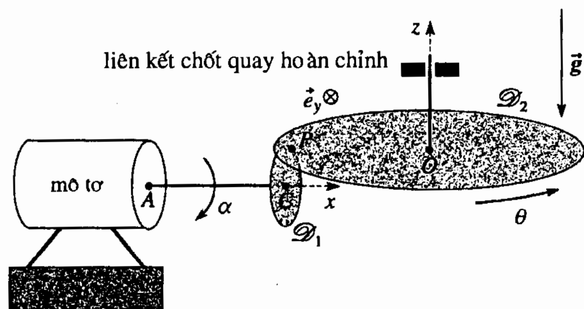
Đĩa $\mathscr{D}_1$ quay không ma sát quanh trục nằm ngang (Ax) cố định dưới tác dụng của một động cơ thực hiện lên $\mathscr{D}_1$ một ngẫu lực có momen Γ không đổi.

Đĩa $\mathscr{D}_2$ có thể quay không ma sát quanh trục (Oz) thẳng đứng cố định, nhờ liên kết kiểu chốt quay hoàn chỉnh.

$\mathscr{D}_2$ nằm trên $\mathscr{D}_1$ tại điểm P, đĩa $\mathscr{D}_1$ này kéo cho $\mathscr{D}_2$ quay nhờ ma sát. Ta giả thiết là có quay mà không trượt tại P và ta gọi f là hệ số ma sát trượt giữa $\mathscr{D}_1$ và $\mathscr{D}_2$.

$\mathscr{D}_1$ là một đĩa đồng nhất có tâm C (cố định) bán kính a và momen quán tính I so với trục (Ax) của nó.

$\mathscr{D}_2$ là một đĩa đồng nhất có tâm O (cố định) khối lượng m và momen quán tính J đối với trục quay (Oz) của nó. Khoảng cách OP là bằng b.



1) Viết các điều kiện lăn mà không trượt liên hệ giữa các vận tốc góc $\dot{\alpha}$ của $\mathscr{D}_1$ và $\dot{\theta}$ của $\mathscr{D}_2$.

2) Tính gia tốc góc $\ddot{\theta}$ của $\mathscr{D}_2$.

3) Giá trị không được vượt quá của Γ là bao nhiêu để giữa $\mathscr{D}_1$ và $\mathscr{D}_2$ thực sự lăn mà không trượt ?

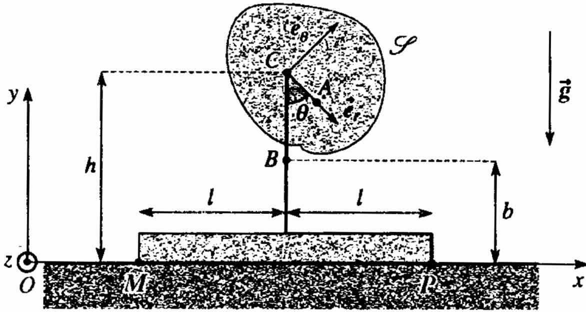
7 Các chuyển động không mong muốn của một máy kém cân bằng

Hệ quy chiếu trái đất $(O\ ;\ x\ ,\ y,\ z)$ được giả thiết là galilé, (Oy) là đường thẳng đứng hướng xuống dưới. Ta kí hiệu g là môđun trọng trường.

Một máy, gồm có :

- một thân máy cố định (MPC) đặt cố định lên mặt đất nằm ngang khối lượng m, rộng $MP = 2l$ và khối tâm B nằm ở độ cao b trên mặt đất.
- một rôtô $\mathscr{S}$ quay quanh một trục nằm ngang Δ đi qua C và đồng tuyến với (Oz), khối lượng m là khối tâm A nằm cách Δ một khoảng a. Trục quay Δ nằm ở độ cao h trên mặt đất.

Một ngẫu lực nguồn gốc điện từ do thân máy tác dụng lên rôto làm cho $\mathscr{S}$ quay quanh trục Δ với vận tốc không đổi ω. Giả thiết rằng $\omega > 0$ và lấy gốc thời gian là thời điểm qua vị trí $\theta = 0$, sao cho $\theta = \omega t$.



Người ta mô hình hóa tác động của mặt đất lên thân máy bằng lực $\vec{N} + \vec{T}$, ở đây $\vec{N}$ là thẳng đứng và $\vec{T}$ nằm ngang. Trạng thái bề mặt chỗ tiếp xúc đất - thân máy được mô tả bởi một hệ số ma sát trượt tĩnh f_s và một hệ số ma sát động f_c.

1) Chứng tỏ rằng một vận tốc quay rất cao có thể phá hoại tiếp xúc giữa đất và thân máy.

Hãy viết biểu thức của vận tốc góc ω_1 mà bắt đầu từ đó có hiện tượng phá hoại tiếp xúc nói trên.

2) Đối với $\omega = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{2}}$ người ta quan sát thấy sự trượt xuất hiện ở thời điểm $t_0 = \dfrac{2\pi}{3\omega}$. Từ đó suy ra giá trị của hệ số ma sát tĩnh f_s.

3) Vận tốc trượt ở gần t_0 có chiều như thế nào ?

Suy ra biểu thức của $\vec{T}$ sao cho sự trượt duy trì theo chiều đó.

4) Xác lập trong trường hợp này biểu thức của số đo đại số của gia tốc $\ddot{x}$ của thân máy.

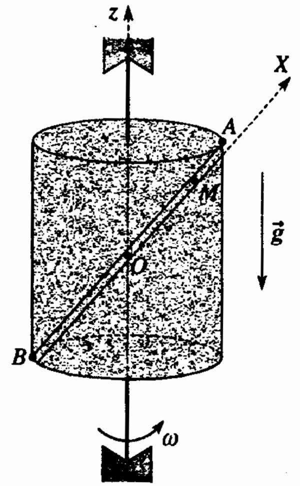
Người ta quan sát thấy rằng sự trượt chấm dứt khi $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}$. Từ đó suy ra giá trị của hệ số ma sát động f_c.

5) Giả thiết rằng $a\omega^2 \ll g$, điều này đảm bảo là không có trượt. Chứng tỏ rằng mặc dầu vậy, máy có thể có xu hướng bị lắc lư, cần xác định những điều kiện để xảy ra điều đó.

8 ★Chất điểm trong một hình trụ

Trong hệ quy chiếu trái đất giả thiết là galilé, một hình trụ bán kính R chiều cao $2R$ có thể quay không ma sát quanh trục (Oz) thẳng đứng của nó. Ở hình trụ có đục một kênh thẳng tiết diện nhỏ, đi qua tâm O của hình trụ như ở hình vẽ.

Ta kí hiệu J là momen quán tính đối với trục (Oz) của hình trụ.



Một chất điểm M có khối lượng m trượt không ma sát trong kênh. Ở thời điểm đầu, M nằm ở A phía trên cao của kênh, đứng yên so với hình trụ và toàn bộ quay với vận tốc ω_0 quanh (Oz).

1) Viết hai nguyên hàm trong đó có vận tốc góc ω của toàn bộ, hoành độ $X = OM$ của điểm M trong kênh và đạo hàm $\dot{X}$ của X.

2) Suy ra một phương trình vi phân bậc nhất của X dưới dạng $\dot{X}^2 + f(X) = cte$.

3) Để đơn giản các phép tính tiếp theo, ta lấy $J = mR^2$.

Cho biết : $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$ và $R = 1\text{m}$.

Vẽ trên giấy kẻ li dạng của hàm $f(X)$ đối với các giá trị của ω_0; thí dụ lấy :

$$\omega_0 = 0\ \text{rad.s}^{-1}\ ; \quad \omega_0 = 2\ \text{rad.s}^{-1}\ ;$$
$$\omega_0 = 3\ \text{rad.s}^{-1}\ ; \quad \omega_0 = 4\ \text{rad.s}^{-1}.$$

Suy ra một cách *định tính* chuyển động của chất điểm ở các trường hợp khác nhau nói trên .

4) Xác định phạm vi $[\omega_1; \omega_2]$ của ω_0 sao cho trong phạm vị đó chất điểm thường xuyên trong hình trụ.

Tính các giá trị của ω_1 và ω_2.

9 ★Hình trụ và khung quay

Trong hệ quy chiếu trái đất giả thiết là galilé, một cái khung không biến dạng tạo nên ba cạnh của một hình vuông, gồm có ba thanh AB, BC và CD đồng nhất, tiết diện không đáng kể, chiều dài b và khối lượng m.

Khung chuyển động quanh trục Δ thẳng đứng đi qua A và D, các liên kết ở các trụ quay A và D là không ma sát.

Ở cạnh BC chỗ điểm giữa E có một hình trụ đồng nhất khối lượng m, bán kính $R = \dfrac{b}{2}$ mà quán tâm trùng với E và vậy là trục trùng với BC.

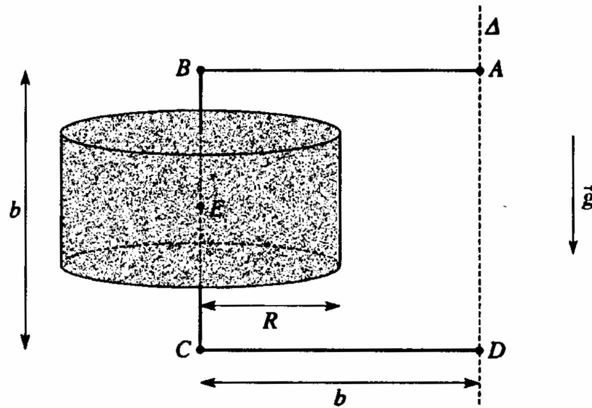
Cho biết momen quán tính.

• của một thanh đồng nhất khối lượng m chiều dài b đối với trục đi qua tâm và vuông góc với thanh là $I = \frac{1}{12}mb^2$;

• của hình trụ đồng nhất, khối lượng m và bán kính R so với trục của nó là $J = \frac{1}{2}mR^2$.

Ở thời điểm đầu, người ta tác động cho hình trụ có vận tốc góc là ω_0, còn khung đứng yên.

Do có ma sát giữa hình trụ và khung, sau một thời gian hình trụ đứng yên đối với khung.



1) Tính tốc độ quay ω_1 của hình trụ khi hình trụ đứng yên đối với khung. Biểu diễn ω_1 theo hàm của I, J và ω_0, rồi sau đó theo hàm của ω_0.

2) Tính công tổng cộng W của các tác động ma sát.

3) ★★ Tính công W_1 của các tác động ma sát thực hiện lên hình trụ và công W_2 của các tác động ma sát thực hiện lên khung. Biểu diễn những công này theo I, J và ω_0, sau đó biểu diễn theo m, b và ω_0.

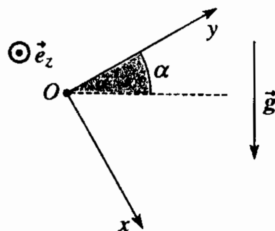
BÀI GIẢI

1 *Chọn cơ sở để chiếu $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sao cho :*

• *$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ trong mặt thẳng đứng, $\vec{e}_y$ trùng với trục quay ;*

• *$\vec{e}_z$ nằm ngang, vuông góc trục quay ;*

và gọi θ là góc giữa thanh OC với mặt thẳng đứng.



Định lí về momen động lượng của con lắc đối với điểm O cố định, chiếu lên trục quay AOB, cho ta :

$$J\ddot{\theta} = (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{mg}).\vec{e}_y \text{ với } \overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} b\cos\theta \\ 0 \\ b\sin\theta \end{vmatrix} \text{ và } \vec{g}\begin{vmatrix} g\cos\alpha \\ -g\sin\alpha, \\ 0 \end{vmatrix}$$

từ đó $J\ddot{\theta} = -mbg\cos\alpha\sin\theta$.

Nếu θ nhỏ, con lắc dao động với chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgb\cos\alpha}}.$$

2 1) *Thanh và đĩa tạo thành vật rắn mà momen quán tính J_0 đối với trục (Oz) được tính theo định lí Huygens :*

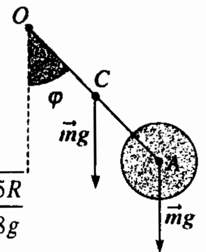
$$J_0 = \underbrace{\left(mR^2 + \frac{1}{3}mR^2\right)}_{\text{thanh}} + \underbrace{\left(m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2\right)}_{\text{đĩa}} = \frac{35}{6}mR^2.$$

Vận dụng định lí momen động lượng đối với O cho toàn bộ hệ, chiếu lên trục (Oz) ; ta có :

$J_0\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi - 2mgR\sin\varphi = -3mgR\sin\varphi$

và nếu φ nhỏ, $J_0\ddot{\varphi} = -3mgR\varphi$

Vậy hệ thực hiện những dao động hình sin chu kì là :



$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{2mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{35R}{18g}}$$

2) *Vận dụng đối với đĩa, định lí momen động lượng đối với A trong hệ quy chiếu trọng tâm. Chiếu lên trục đi qua A và đồng tuyến với (Oz) ta có* $J\dot{\omega} = 0$.

Từ đó ta suy ra tốc độ quay ω của đĩa là không đổi trong quá trình chuyển động : $\omega = \text{cte} = \omega_0$.

Ta tính thành phần lên (Oz) của momen động lượng đối với 0 của toàn bộ (trong hệ quy chiếu galilé) :

$$L_{Oz} = L_{Oz,\text{thanh}} + L_{Oz,\text{đĩa}}$$

Với $L_{Oz,\text{thanh}} = \left(mR^2 + \frac{1}{3}mR^2\right)\dot{\varphi} = \frac{4}{3}mR^2\dot{\varphi}$

$$L_{Oz,\text{đĩa}} = \left(\overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}(A)\right).\vec{e}_z + J\omega_0 = m(2R)^2\dot{\varphi} + J\omega_0,$$

theo định lí KŒNIG.

Định lí momen động lượng đối với O vận dụng cho toàn bộ (trong hệ quy chiếu galilé), chiếu lên (Oz) cho ta :

$$\frac{4}{3}mR^2\ddot{\varphi} + 4mR^2\ddot{\varphi} = -3mgR\sin\varphi \text{, vì } \omega_0 = \text{cte} ;$$

và nếu φ vẫn còn là nhỏ : $\ddot{\varphi} = -\frac{9}{16}\frac{g}{R}\varphi$.

Bây giờ thanh thực hiện những dao động hình sin với chu kì :

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{16R}{9g}}$$

Ta nhận xét rằng T_2 hơi nhỏ hơn T_1 và vận tốc quay ω_0 không ảnh hưởng lên T_2.

3 Vận dụng định lí momen động lượng cho cánh cửa trong hệ quy chiếu gắn với xe ôtô (tịnh tiến đối với hệ quy chiếu trái đất), khi chiếu lên trục thẳng đứng (Oz), ta được:

$$J\ddot{\alpha} = -\vec{\mathcal{M}}_{O,\,\text{fie}}\cdot\vec{e}_z$$

Momen các lực quán tính kéo theo đối với điểm O của trục quay (Oz) của cánh cửa là:

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,\,\text{fie}} = -\iiint_{\mathcal{S}}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}_e(M)dm = -\left[\iiint_{\mathcal{S}}\overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m\right]\wedge\vec{a} = -m\overrightarrow{OG}\wedge a$$

từ đó $J\ddot{\alpha} = -mba\sin\alpha$.

Nhân phương trình này với $\dot{\alpha}$ và lấy tích phân giữa thời điểm đầu $\left(\alpha=\alpha_0=\frac{\pi}{2},\ \dot{\alpha}=0\right)$ và một thời điểm t nào đó, ta có:

$$J\dot{\alpha}^2 = 2mba\cos\alpha$$

Vậy thời gian t_0 để đóng cửa được xác định bởi (chú ý dấu: $\dot{\alpha}$ là âm, α giảm từ α_0 đến 0):

$$t_0 = \sqrt{\frac{J}{2mba}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}},$$

sau khi tính giá trị của tích phân, ta được:

$$t_0 = 2{,}62\sqrt{\frac{J}{2mba}}.$$

4 Để thiết lập phương trình chuyển động ta có thể dùng ngang nhau hai phương pháp:

- ***Phương pháp định lí momen động lượng*** ở O, vận dụng cho toàn bộ (đòn cân + hai đĩa), chiếu lên trục quay (Oz).

Thành phần theo (Oz) của momen động lượng là:

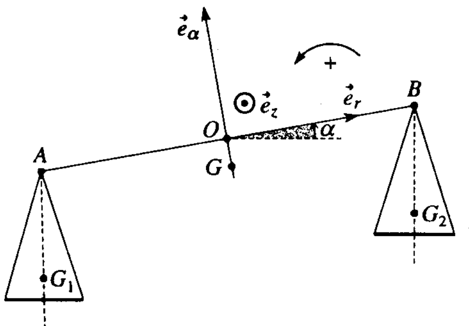
$$L_{Oz} = (J+ma^2)\dot{\alpha} = (\overrightarrow{OG_1}\wedge M\vec{v}(G_1)+\overrightarrow{OG_2}\wedge M\vec{v}(G_2)).\vec{e}_z,$$

vì rằng các đĩa có chuyển động tịnh tiến tròn: vận tốc của các quán tâm G_1 và G_2 của chúng nghiệm đúng:

$$\vec{v}(G_1)=\vec{v}(A) \text{ và } \vec{v}(G_2)=\vec{v}(B)$$

với $\vec{v}(B)=-\vec{v}(A)=b\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha$, từ đó:

$$L_{Oz} = (J+ma^2)\dot{\alpha}+2Mb^2\dot{\alpha}$$



Vì không có ma sát, ta suy ra:

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = (J+ma^2+2Mb^2)\ddot{\alpha} = \mathcal{M}_{Oz,\,f_{ext}}$$

$$= (\overrightarrow{OG}\wedge m\vec{g}+\overrightarrow{OG_1}\wedge M\vec{g}+\overrightarrow{OG_2}\wedge M\vec{g}).\vec{e}_z$$

vậy $(J+ma^2+2Mb^2)\ddot{\alpha} = -mga\sin\alpha$

- ***Phương pháp nguyên hàm của năng lượng*** vì ở đây không có ma sát trong quá trình chuyển động:

Động năng của hệ là:

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}(J+ma^2)\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}mv(G_1)^2+\frac{1}{2}Mv(G_2)^2,$$

nghĩa là $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}(J+ma^2+2Mb^2)\dot{\alpha}^2$; và thế năng là bằng:

$$\mathcal{E}_P = -mga\cos\alpha(+\text{cte})$$

vì thế năng của tập hợp hai đĩa cân không thay đổi trong quá trình chuyển động.

Vậy $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K+\mathcal{E}_P = \frac{1}{2}(J+ma^2+2Mb^2)\dot{\alpha}^2 - mga\cos\alpha = \text{cte}$

Lấy đạo hàm ta tìm lại được cùng một phương trình như trước.

Khi α nhỏ, ta có thể thay thế $\sin\alpha$ cho α và ta có một phương trình vi phân cổ điển mà nghiệm là hàm hình sin với vận tốc góc:

$$\Omega = \sqrt{\frac{mga}{J+ma^2+2Mb^2}} \quad \text{và chu kì } T = \rho\frac{2\pi}{\Omega}$$

5 **1)** Vì OC và $\mathcal{D}$ quay không ma sát quanh các trục tương ứng của chúng và vì $\mathcal{D}$ lăn không trượt trên $\mathcal{A}$, chỉ có các trọng lượng của OC và của $\mathcal{D}$ làm việc trong quá trình chuyển động. Các trọng lượng này dẫn xuất từ thế năng $\mathcal{E}_P$:

$$\mathcal{E}_P = -mgR\cos\varphi - 2mgR\cos\varphi(+\text{cte}),$$

và cơ năng của hệ được bảo toàn trong quá trình chuyển động. Ta tính động năng $\mathcal{E}_K$ của hệ:

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K(\text{thanh})+\mathcal{E}_K(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2+\left(\frac{1}{2}mv(C)^2+\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

với $v(C)^2=(2R\dot{\varphi})^2$

Vận tốc quay ω của $\mathcal{D}$ là:

$$\vec{v}(I_{\text{đĩa}}) = \vec{0} = \vec{v}(C)+\omega\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{CI}, \text{ từ đó } \omega = 2\dot{\varphi}$$

Từ đó ta suy ra $\mathcal{E}_K = \frac{11}{3}mR^2\dot{\varphi}^2$, và phương trình vi phân mà φ nghiệm đúng là:

$$\frac{11}{3}R^2\dot{\varphi}^2 - 3g\cos\varphi = \text{cte}$$

2) Ta lấy đạo hàm của phương trình trên. Khi φ còn nhỏ, ta có phương trình dạng: $\ddot{\varphi} = -\Omega^2\varphi$ với $\Omega^2 = \frac{9g}{22R}$.

Con lắc thực hiện những dao động hình sin, $\varphi = \varphi_0\cos\Omega t$, có chu kì:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{22R}{9g}}.$$

6 **1)** *Giả thiết $\dot\alpha$ và $\dot\theta$ dương, sự lăn không trượt dẫn đến :*

$$a\dot\alpha = b\dot\theta$$

2) *Vì các liên kết quay là hoàn chỉnh và có lăn mà không trượt ở P, nên chỉ có momen của ngẫu lực động cơ làm việc.*

Ta áp dụng cho toàn bộ hai đĩa các định lí về công suất động năng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}J\dot\theta^2\right) = \Gamma\dot\alpha$$

từ đó, khử $\dot\alpha$ ta được: $\quad \ddot\theta = \frac{b}{a}\frac{\Gamma}{J + \frac{b^2}{a^2}I}$.

Ta cũng có thể tìm biểu thức đó của $\ddot\theta$ bằng cách vận dụng định lí momen động lượng cho $\mathcal{D}_1$ rồi cho $\mathcal{D}_2$ và chiếu lên các trục quay tương ứng.

$\mathcal{D}_1$ tác động lên $\mathcal{D}_2$ một lực $T\vec e_y + N\vec e_z$ ở P ($N > 0$ và $\vec T$, đối lập với trượt nếu có xảy ra, là đồng tuyến với $\vec e_y$ xác định bởi $\vec e_x \wedge \vec e_y = \vec e_z$); ta có:

- *đối với $\mathcal{D}_1$, $I\ddot\alpha = \Gamma + aT$ (định luật tác động và phản tác động)*
- *đối với $\mathcal{D}_2$, $J\ddot\theta = -bT$.*

Khử T, rồi khử $\ddot\alpha$, rõ ràng là ta có được cùng giá trị $\ddot\theta$ như trước đây.

3) *Quán tâm của $\mathcal{D}_2$ là cố định, định lí tổng hợp động lực vận dụng cho $\mathcal{D}_2$ cho ta $N = mg$ (khi liên kết chốt trượt là hoàn chỉnh, tất cả lực tiếp xúc đều nằm ngang). Định luật Coulomb $|T| \le fN$ dẫn đến:*

$$|T| = J\frac{\ddot\theta}{b} = \frac{J}{a}\frac{\Gamma}{J + \frac{b^2}{a^2}I} \le fmg \quad \text{vậy} \quad \Gamma \le afmg\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{I}{J}\right).$$

7 *Khối tâm G của máy được định nghĩa là:*

$$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OA}$$

Kí hiệu x là toạ độ của B, $\overrightarrow{OG}$ có các thành phần:

$$\begin{vmatrix} x + \frac{1}{2}a\sin\omega t \\ \frac{1}{2}(b + h - a\cos\omega t) \end{vmatrix}$$

Giả thiết rằng thân máy tiếp xúc với mặt đất, vận dụng các định lí tổng hợp động lực cho toàn bộ (thân máy + rôto), chiếu lên (Ox) và (Oy):

$$\begin{vmatrix} 2m\ddot x - ma\omega^2\sin\omega t = T \\ ma\omega^2\cos\omega t = N - 2mg \end{vmatrix}$$

1) *Tiếp xúc giữa mặt đất và thân máy sẽ không còn khi N triệt tiêu, điều này có thể xảy ra khi tốc độ quay của rôto vượt quá giá trị ω_1 xác định bởi:*

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{a}}$$

2) *Giữa thời điểm đầu và thời điểm t_0, thân máy bất động, $\ddot x = 0$, từ đó:*

$$\begin{vmatrix} T = -ma\omega^2\sin\omega t \\ N = 2mg + ma\omega^2\cos\omega t \end{vmatrix}$$

Định luật COULOMB cho $|T| \le f_s|N|$, từ đó, chú ý đến dấu của T và N, ta rút ra: $a\omega^2\sin\omega t \le f_s(2g + a\omega^2\cos\omega t)$ và ở giới hạn, vào thời điểm t_0 :

$$a\omega^2\frac{\sqrt3}{2} = f_s\left(2g - \frac{a\omega^2}{2}\right)$$

$$\text{từ đó : } f_s = \frac{a\omega^2\frac{\sqrt3}{2}}{2g - \frac{a\omega^2}{2}} = \frac{a\omega_1^2\frac{\sqrt3}{4}}{2g - \frac{a\omega_1^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt3} = 0{,}58$$

3) *Sau thời điểm t_0, thân máy có xu hướng trượt về bên phải theo chiều trục (Ox) ($\dot x > 0$). Khi đó từ định luật Coulomb ta có:*

$$|T| = f_c|N|, \text{ vậy } T = -f_c(2mg + ma\omega^2\cos\omega t)$$

4) *Định luật tổng hợp động lực cho ta (xem mở đầu):*

$$\ddot x = \frac{T}{2m} + \frac{1}{2}a\omega^2\sin\omega t = -f_cg + \frac{a\omega^2}{2}(\sin\omega t - f_c\cos\omega t)$$

Lấy tích phân hệ thức đó từ thời điểm t_0, lúc đó vận tốc trượt $\dot x$ bằng không và đến thời điểm t_1 lúc đó vận tốc cũng bằng không:

$$0 = -f_cg(t_1 - t_0) + \frac{a\omega}{2}\left[(-\cos\omega t_1 + \cos\omega t_0) - f_c(\sin\omega t_1 - \sin\omega t_0)\right]$$

Từ đấy ta có:

$$f_c = \frac{\frac{a\omega}{2}\left(-\cos\omega t_1 + \cos\omega t_0\right)}{g\left(t_1 - t_0\right) + \frac{a\omega}{2}\left(\sin\omega t_1 - \sin\omega t_0\right)}$$

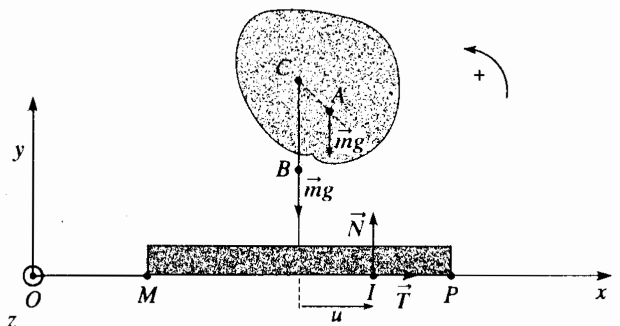
Tính đến các giá trị của $\omega = \frac{\omega_1}{\sqrt2} = \sqrt{\frac{g}{a}}$, của $t_0 = \frac{2\pi}{3\omega}$ và của $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$,

ta có:

$$f_c = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} - \sqrt3} = 0{,}41$$

Ta nhận thấy rõ ràng là $f_c < f_s$.

5) *Giả thiết rằng tác dụng của đất lên thân máy tại một điểm I nằm ở hoành độ (x+u), vận dụng trong hệ quy chiếu trái đất, định lí momen động lượng đối với điểm C (điểm cố định) của toàn bộ (thân máy + rôto) chiếu lên trục nằm ngang (Oz) ta có: $0 = hT + uN - mga\sin\omega t$*



Thật vậy, ta nên nhớ rằng:

- thân máy là cố định và rôto quay với vận tốc không đổi ;
- các tác động nội giữa rôto và thân máy không xuất hiện trong định lí.

Thay N và T bởi các giá trị của chúng (xem câu hỏi 2): $\ddot{x} = 0$

$$0 = h - (-ma\omega^2 \sin\omega t) + u(2mg + ma\omega^2 \cos\omega t) - mga\sin\omega t$$

Động cơ không lắc lư nếu điểm tác dụng I luôn luôn ở giữa các điểm M và P của thân máy, điều này cho ta:

$$|u| \leq l \text{ và } a \leq 2l .$$

8 1) Các tác động bên ngoài lên hệ (hình trụ + chất điểm) chỉ là trọng lượng hình trụ, trọng lượng điểm M và các tác động của trụ lên trục quay: momen của các tác động này lên trục (Oz) là bằng không; do đó, các thành phần L_z của momen động lượng của cả tập hợp được bảo toàn trong quá trình chuyển động ở hệ quy chiếu trái đất:

$$L_z = J\omega + (\overline{OM} \wedge m\vec{v}(M)).\, \vec{e}_z = \text{cte}$$

Vậy với việc đưa vào cơ sở chiếu $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ liên kết với hình trụ sao cho kênh ở trong mặt (Oxz), ta có:

$$\overline{OM} = X\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

từ đó vận tốc của điểm M trong hệ quy chiếu trái đất là:

$$\vec{v}(M) = \dot{X}\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_z) + X\frac{\sqrt{2}}{2}\omega\vec{e}_y$$

Ta rút ra từ đó:

$$\left(J + \frac{1}{2}mX^2\right)\omega = \text{cte} = (J + mR^2)\omega_0$$

Vì không có ma sát, cơ năng của toàn bộ được bảo toàn ngay cả trong quá trình chuyển động ở hệ quy chiếu trái đất, từ đó:

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \frac{1}{2}X^2\omega^2\right) + mg\frac{\sqrt{2}}{2}X = \frac{1}{2}(J + mR^2)\omega_0^2 + mgR .$$

2) Khử ω ở hai phương trình trên, ta có:

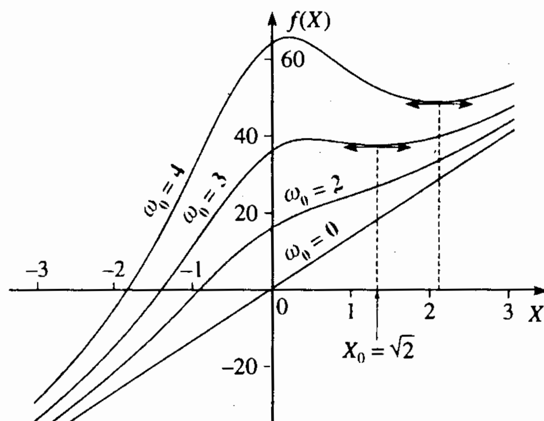
$$\dot{X}^2 + \frac{\left(\frac{J}{m} + R^2\right)^2}{\frac{J}{m} + \frac{1}{2}X^2}\omega_0^2 + g\sqrt{2}X = cte = \left(\frac{J}{m} + R^2\right)\omega_0^2 + 2gR ,$$

nó có dạng $\dot{X}^2 + f(X) = f(X_0)$ với $X_0 = R\sqrt{2}$ là vị trí ban đầu của chất điểm ở A.

3) Cho $J = mR^2$, phương trình trở thành:

$$\dot{X}^2 + \frac{4R^4}{R^2 + \frac{X^2}{2}}\omega_0^2 + g\sqrt{2}X = \text{cte} = 2R^2\omega_0^2 + 2gR$$

Dáng điệu của hàm $f(X) = \dfrac{4R^4}{R^2 + \frac{X^2}{2}}\omega_0^2 + g\sqrt{2}X$ được vẽ ra ở hình sau đây với các giá trị khác nhau của ω_0.



Ta nhận thấy:

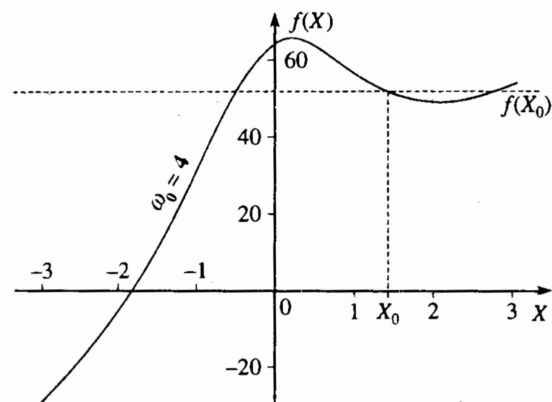
- với $\omega_0 = 0$ hay $\omega_0 = 2$, f(X) không có cực tiểu
- với $\omega_0 = 3$, f(X) có một cực tiểu ở dưới X_0 ;
- với $\omega_0 = 4$, f(X) có một cực tiểu ở trên X_0 .

Những vị trí mà hạt có được là những vị trí mà:

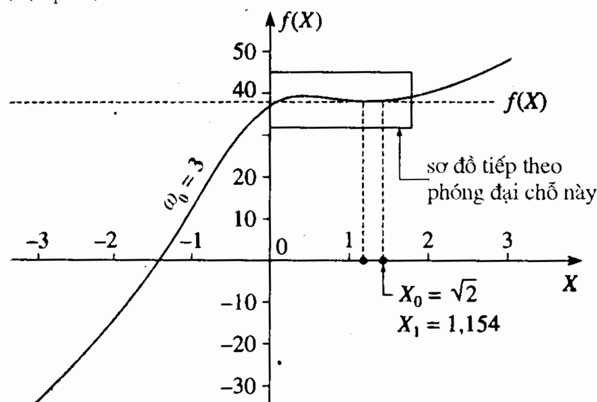
$$f(X) \leq f(X_0)$$

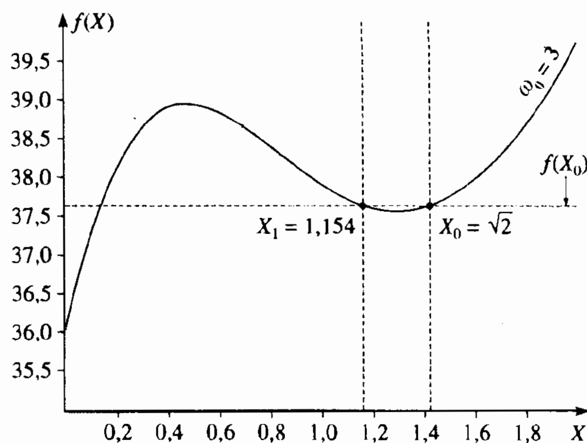
Ta từ đấy suy ra (xem §**2.3.2** chương 4):

- với $\omega_0 = 0$ hay $\omega_0 = 2$ rad.s^{-1} , chất điểm tụt xuống kênh và rời hình trụ ở B;
- với $\omega_0 = 4$ rad.s^{-1} chất điểm bị đẩy ra khỏi hình trụ ở A, ngay từ thời điểm đầu:



- với $\omega_0 = 3$ rad.s^{-1} chất điểm dao động trong kênh giữa các vị trí X_0 và X_1 xác định bởi $f(X_1) = f(X_0)$, không bao giờ ra khỏi hình trụ $(X_1 > 0)$.





Sơ đồ trên đây biểu diễn phóng đại một chỗ của f(X) trong trường hợp $\omega_0 = 3$ rad.s^{-1}

4) *Đối với các giá trị* ω_0 *dưới một giới hạn* ω_1 *nào đó (bao gồm giữa 2 và 3), f(X) không có cực tiểu : như vậy với* ω_1, *f(X) phải có điểm uốn tiếp tuyến nằm ngang.*

Phép tính $\frac{df(X)}{dX} = 0$ *và* $\frac{d^2f}{d^2X} = 0$ *dẫn đến* $X = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, *và*

$$\omega_1^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{g}{R} \text{ vậy } \omega_1 = 2,748 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Với những giá trị ω_0 *trên một giới hạn* ω_2 *nào đó, cực tiểu của f(X) luôn tồn tại khi X lớn hơn* X_0, *điều này làm cho ở A điểm M lập tức bị phóng đi; do đó, đối với* ω_2, *f(X) luôn có một cực tiểu ở* $X = X_0$. *Phép tính* $\frac{df}{dX} = 0$ *đối với* $X = X_0 = R\sqrt{2}$ *cho ta:*

$$\omega_2^2 = \frac{g}{R}, \text{ vậy } \omega_2 = 3,132 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Chất điểm luôn luôn ở trong hình trụ khi:

$$\omega_1 = 2,748 \text{ rad.s}^{-1} \le \omega_0 \le \omega_2 = 3,132 \text{ rad.s}^{-1}.$$

9 *Trước hết ta tính momen quán tính* J_c *của khung so với trục quay Δ bằng cách áp dụng định lí* HUYGENS *đối với từng thanh:*

$$J_c = \underbrace{2\left(I + \frac{1}{4}mb^2\right)}_{\text{thanh } AB \text{ và } CD} + \underbrace{mb^2}_{\text{thanh } BC} = \frac{5}{3}mb^2$$

1) *Chỉ có tác động ngoại sau đây tác động lên toàn bộ {khung + hình trụ}:*

- *các tác động của các trục quay mà momen của chúng không có thành phần nào trên trục quay cả vì không có ma sát;*
- *các trọng lượng mà momen không có thành phần nào cả trên trục quay.*

Về sau, khi vận dụng đối với hệ này định lí momen động lượng (trong hệ quy chiếu trái đất) đối với trục Δ: ta suy ra rằng momen động lượng của toàn bộ {khung + hình trụ} đối với trục Δ là một hằng số chuyển động: không nên quên rằng cuối diễn biến, khung hình trụ tạo nên một vật rắn có vận tốc ω_1, *ta có:*

$$J\omega_0 = (J + mb^2 + J_c)\omega_1.$$

Tính đến những giá trị cho ở đề bài, ta tìm được $\omega_1 = \frac{3}{67}\omega_0$.

2) *Áp dụng định lí động năng (trong hệ quy chiếu trái đất) đối với tập hợp {khung + hình trụ}: chỉ có các tác động ma sát (ở đây là các tác động nội) làm việc trong quá trình chuyển động, từ đó:*

$$W = W_{int} = \Delta\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}(J + mb^2 + J_c)\omega_1^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2,$$

điều này dẫn đến $W = \frac{1}{2}J\omega_0(\omega_1 - \omega_0) = -\frac{4}{67}mb^2\omega_0^2$.

Công này rõ ràng là âm: một phần động năng bị tiêu tán dưới dạng năng lượng nhiệt do ma sát.

3) *Các phép tính* W_1 *và* W_2 *là khá tế nhị. Trước hết ta phải làm rõ các tác động cơ tiếp xúc giữa hình trụ và khung:*

- *lực* $\vec{R}$ *của khung tác dụng lên hình trụ và lực* $-\vec{R}$ *của hình trụ tác dụng lên khung.*
- *momen* $\vec{\mathcal{M}}_E$ *đối với E của khung tác dụng lên hình trụ và momen* $-\vec{\mathcal{M}}_E$ *của hình trụ tác dụng lên khung.*

Các tác động ma sát được đặc trưng bởi thành phần của momen $\vec{\mathcal{M}}_E$ *lên trục quay: ta gọi thành phần đó là* $\mathcal{M}_\Delta$. *Công của các tác động ma sát* W_1 *và* W_2 *được viết ra tương ứng là:*

$$W_1 = \int_0^\infty \vec{\mathcal{M}}_E.\vec{\omega}_{\text{hình trụ}}\,dt = \int_0^\infty \mathcal{M}_\Delta\omega_{\text{hình trụ}}\,dt;$$

$$W_2 = -\int_0^\infty \vec{\mathcal{M}}_E.\vec{\omega}_{\text{khung}}\,dt = -\int_0^\infty \mathcal{M}_\Delta\omega_{\text{khung}}\,dt$$

Chúng ta sẽ không xác định công W_1 *từ biểu thức trên (vì chúng ta không biết sự phụ thuộc của* $\vec{\omega}_{\text{hình trụ}}$ *hình trụ theo thời gian), mà chúng ta dùng định lí động năng như ở câu hỏi 2. Muốn vậy ta phải tránh công của lực tiếp xúc* $\vec{R}$ *và khôn khéo vận dụng định lí động năng cho hình trụ trong hệ quy chiếu trọng tâm của nó (ở hệ này* $\vec{R}$ *không làm việc). Ta không quên rằng vận tốc quay* $\vec{\omega}_{\text{hình trụ}}$ *của hình trụ ở trong hệ quy chiếu trái đất và ở trong hệ quy chiếu trọng tâm là như nhau. Tiếp theo đó, công* W_1 *có cùng biểu thức đối với cả hai hệ quy chiếu.*

$$W_1 = \Delta\mathscr{E}^*_{K\,\text{hình trụ}} = \frac{1}{2}J(\omega_1^2 - \omega_0^2), \text{ từ đó } W_1 = -\frac{280}{4489}mb^2\omega_0^2.$$

W_2 *được tính theo hiệu :* $W_2 = W - W_1 = \frac{12}{4489}mb^2\omega_0^2$.

Ta nhận xét rằng W_2 *là dương, điều này không có gì là lạ, vì các tác động ma sát thực hiện một công phát động lên khung, làm cho khung chuyển động. Chỉ có công W tổng cộng của các tác động ma sát phải là âm.*

Bài toán 1

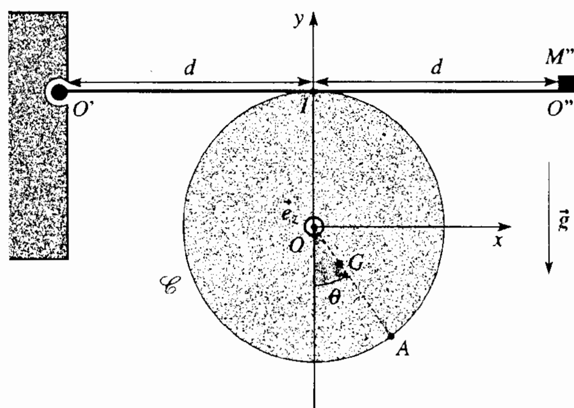
★ Dao động của một cái đĩa

Xét một đĩa $\mathscr{C}$ bán kính R khối lượng M.

Hệ tọa độ trực chuẩn $(O\,;\,x,\,y,\,z)$ sao cho (Oz) trùng với trục của $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ không phải là đồng nhất: quán tâm G của C nằm trong mặt (Oxy) trên bán kính OA ở khoảng cách $b=\frac{1}{3}R$ tính từ O. Momen quán tính của $\mathscr{C}$ so với (Oz) là $J=\frac{5}{12}MR^2$.

Cho biết : $R=0{,}1\text{m}$ và $g=10\text{m.s}^{-2}$.



1) $\mathscr{C}$ chuyển động, không ma sát quanh trục (Oz) của nó, giả thiết cố định và nằm ngang. Tính chu kì T của những dao động nhỏ chung quanh vị trí cân bằng bền.

2) $\mathscr{C}$ chuyển động không ma sát quanh trục (Oz) cố định và nằm ngang. Một thanh có tiết diện không đáng kể chiều dài $2d$, khối lượng $M'=\frac{M}{300}$ nằm ngang không chuyển động trên đĩa theo sơ đồ ($O'I = IO'' = d$) trong mặt phẳng (Oxy). Thanh chuyển động không ma sát quanh trục nằm ngang $(O'z')$ song song với (Oz) đi qua một trong các đầu mút; đầu mút kia của thanh ở O'' có cố định một khối điểm $M''=\frac{M}{150}$.

Hệ số ma sát giữa thanh và đĩa là f. Vị trí của đĩa được tính theo góc θ.

Người ta buông đĩa ra không có vận tốc đầu, gần vị trí cân bằng bền.

a) Thiết lập phương trình vi phân của chuyển động.

b) θ (độ lớn của góc ban đầu dương) và f phải thỏa mãn bất đẳng thức nào để có chuyển động ?

c) Viết biểu thức của θ phụ thuộc thời gian t, θ_0, f, $\omega=\frac{2\pi}{T}$ với $0\le t\le T$.

d) Giá trị ban đầu của θ là $\theta=0{,}084rad$; ở thời điểm $\frac{T}{2}$, giá trị của θ là $\theta_1=-0{,}068$ rad .

Suy ra giá trị của hệ số ma sát f.

e) Sau bao lâu (tính theo hàm của T) đĩa sẽ đứng yên? Lúc đó giá trị của θ là bao nhiêu? Vẽ đồ thị θ phụ thuộc thời gian t.

BÀI GIẢI

1) Định lí momen động lượng áp dụng cho đĩa đối với O, chiếu lên trục (Oz) cho ta:

$$J\ddot{\theta}=-Mgb\sin\theta=-Mgb\theta.$$

Đĩa dao động quanh vị trí cân bằng $\theta=0$ theo một chuyển động hình sin với vận tốc góc $\omega=\sqrt{\frac{Mgb}{J}}$ và chu kì $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgb}}$, vậy $T=2\pi\sqrt{\frac{5R}{4g}}$.

Áp dụng số: $T=0{,}7s$.

2) a) Ta gọi $\vec{F}=F_T\vec{e}_x-F_N\vec{e}_y$ là lực thanh tác dụng lên đĩa ở điểm tiếp xúc I.

Vận dụng định lí momen động lượng:

• ở O, đối với đĩa, chiếu lên trục (Oz):

$$J\ddot{\theta}=-Mgb\sin\theta-RF_T\approx-Mgb\theta-RF_T \quad (1);$$

• ở O', đối với thanh, chiếu lên trục (Oz) (nhớ rằng đĩa tác dụng lên thanh lực $-\vec{F}$ ở I):

$$0=+d\,F_N-d\,M'g-2d\,M''g$$

vì thanh không quay quanh O'.

Từ đó ta suy ra $F_N=\frac{Mg}{60}$.

b) Nếu đĩa đứng yên, từ định luật COULOMB ta có: $|F_T|\le f\,|F_N|=f\frac{Mg}{60}$.

Lúc đó phương trình (1) cho ta $(\ddot{\theta} = 0)$:

$$|\theta| = \frac{R}{Mgb}|F_T| = \frac{R}{Mgb} f \frac{Mg}{60}\text{ , vậy } |\theta| \le \theta_e = f\frac{R}{60b} = \frac{f}{20}.$$

Vùng $|-\theta_e; \theta_e|$ tạo nên khoảng cân bằng: nếu đĩa ở đấy có một lúc nào đó có vận tốc góc bằng không, nó cứ mãi mãi ở vị trí đó.

Như vậy đĩa sẽ chuyển động nếu $\theta_0 > \theta_e$ (vì θ_0 dương) điều mà ta giả thiết tiếp theo đây.

c) θ_0 là dương và trọng lượng thực hiện ngẫu lực kéo về, vận tốc góc $\dot{\theta}$ là âm lúc khởi động; do đó giá trị F_T của lực ma sát là âm (chú ý dấu của F_T : F_T ngược với vận tốc trượt của đĩa) và bằng:

$$F_T = -f\frac{Mg}{60} = -J\frac{\omega^2}{R}\theta_e$$

(1) được viết lại thành:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \omega^2\theta_e \qquad (2)$$

lấy tích phân, tính đến các điều kiện đầu:

$$\theta = \theta_e + (\theta_0 - \theta_e)\cos\omega t$$

Ở thời điểm $t = \frac{T}{2}$, $\dot{\theta}$ triệt tiêu và $\theta\left(\frac{T}{2}\right) = \theta_1 = -(\theta_0 - 2\theta_e)$:

- nếu $|2\theta_e - \theta_0| \le \theta_e$, đĩa đứng yên;
- nếu $|2\theta_e - \theta_0| > \theta_e$, đĩa bắt đầu chuyển động với vận tốc góc dương.

Ta ở vào trường hợp cuối này: F_T là dương và bằng:

$$F_T = +f\frac{Mg}{60} = J\frac{\omega^2}{R}\theta_e$$

(1) được viết ra thành:

$$\ddot{\theta} - \omega^2\theta = -\omega^2\theta_e \quad (3),$$

Tính đến tính liên tục của θ và $\dot{\theta}$ ở thời điểm $\frac{T}{2}$ nghiệm của phương trình trên là:

$$\theta = -\theta_e + (3\theta_e - \theta_0)\cos\omega\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

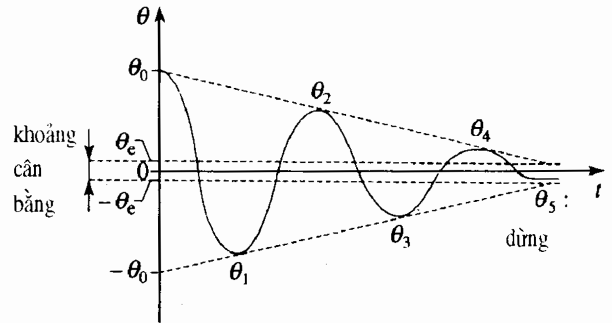
Ở thời điểm $t = T$, $\dot{\theta}$ triệu tiêu và $\theta(T) = \theta_2 = \theta_0 - 4\theta_e$:

- nếu $|\theta_0 - 4\theta_e| \le \theta_e$, đĩa đứng yên ;
- nếu $|\theta_0 - 4\theta_e| > \theta_e$, đĩa tiếp tục chuyển động với vận tốc góc âm; F_T là âm và phương trình (1) có lại dạng (2) mà ta có thể lấy tích phân tính đến tính liên tục của θ và $\dot{\theta}$ ở thời điểm T, v.v..

d) Áp dụng số: $2\theta_e = \theta_0 + \theta_1 = 0{,}016$ rad , từ đó $f = 0{,}16$.

e) Cứ mỗi nửa chu kì, môđun của biên độ giảm $2\theta_e = 0{,}016$ rad .

Sơ đồ dưới đây cho thấy diễn biến của θ theo thời gian.



Ta lần lượt tìm thấy các biên độ sau:

$\frac{T}{2}$	T	$3\frac{T}{2}$	$2T$	$5\frac{T}{2}$
$\theta_1 = 0{,}068$	$\theta_2 = 0{,}052$	$\theta_3 = -0{,}036$	$\theta_4 = 0{,}020$	$\theta_5 = -0{,}004$

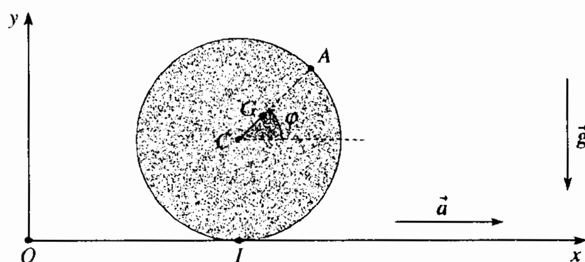
θ_5 ở vào khoảng cân bằng: như vậy đĩa đứng yên ở thời điểm $t = 5\frac{T}{2}$ hay $t = 1{,}76$s.

Bài toán 2

★ Chuyển động của một cái đĩa trên một mặt di động

Xét một cái đĩa $\mathscr{D}$ tâm C bán kính R khối lượng M. $\mathscr{D}$ không đồng nhất: quán tâm G nằm trên bán kính CA cách C một đoạn là $b = \frac{1}{3}R$. Momen quán tính của $\mathscr{D}$ đối với trục là $J = \frac{15}{12}MR^2$.

Cho biết : $R = 0{,}1$ m và $g = 10$ m.s^{-2}.



$\mathscr{D}$ nằm yên thẳng đứng trên một mặt nằm ngang, mặt này chuyển động với gia tốc $\vec{a}$ không đổi, môđum của gia tốc là a.

Đặt $\text{tg}\alpha = \frac{a}{g}$ $\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$

Mặt phẳng được xem là sần sùi sao cho đĩa luôn luôn lăn mà không trượt. Trước hết ta nghiên cứu cân bằng tương đối của hình trụ, sau nghiên cứu những dao động nhỏ của nó trong hệ quy chiếu $(O; x, y, x)$ gắn với mặt phẳng: Oz là đồng tuyến với trục của $\mathscr{D}$, (Ox) là đồng tuyến với gia tốc của mặt phẳng.

Vị trí của hình trụ trong hệ quy chiếu gắn liền với mặt phẳng được xác định bởi góc $\varphi = (\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CG})$

1) Tìm hệ thức liên hệ φ và α lúc cân bằng? (Làm cho xuất hiện góc $\beta = \varphi + \alpha$).

2) Chứng tỏ rằng chỉ có thể cân bằng khi những giá trị α nhỏ hơn một giá trị giới hạn α_M . Suy ra giá trị a_M tương ứng.

3) Đối với $\alpha < \alpha_M$, chứng tỏ rằng có hai góc c.. bằng φ_1 và φ_2 nằm giữa $-\pi$ và $+\pi$. Chứng tỏ rằng $\varphi_1 + \varphi_2 = -2\alpha$.

4) Tính φ_1 và φ_2 đối với $a = 1$ m. s^{-2} .

5) Giá trị nào trong các giá trị trên ứng với cân bằng bền?

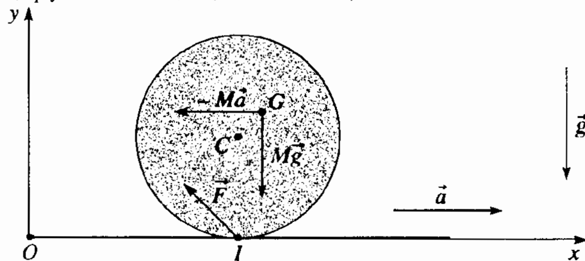
6) Nếu hệ số ma sát f giữa mặt phẳng và hình trụ có giá trị $f = 0{,}16$ có khả năng có cân bằng này không?

7) Tính chu kì của các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng bền, sau đó áp dụng tính số.

BÀI GIẢI

Trong hệ quy chiếu không Galilé gắn với mặt phẳng, đĩa chịu tác dụng của:

- trọng lượng $M\vec{g}$ của đĩa, điểm đặt là G;
- tác động tiếp xúc $\vec{F}$ của mặt phẳng, tác dụng vào điểm tiếp xúc I;
- các lực quán tính kéo theo ở đây rút gọn lại là lực tổng hợp $-M\vec{a}$ tác dụng lên G (vì hệ quy chiếu gắn với mặt phẳng là tịnh tiến so với hệ quy chiếu trái đất, được xem là Galilé).



Khi đĩa lăn không trượt trên mặt phẳng, công suất của $\vec{F}$ bằng không và những lực khác là dẫn suất từ thế năng $\mathscr{E}_P$.

- $Mgb\sin\varphi(+\text{cte})$ đối với trọng lượng ;
- $Ma(-R\varphi + b\cos\varphi)(+\text{cte})$ đối với lực quán tính kéo theo. Thực tế công suất của lực quán tính kéo theo được viết là:

$$\mathscr{P}_{f_{ie}} = -M\vec{a}\,.\,\vec{v}(G) = -M\vec{a}\,.\,(\vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IG})$$

với $\vec{v}(I) = \vec{0}$ và $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$, từ đó $\mathscr{P}_{f_{ie}} = Ma\dot{\varphi}(R + b\sin\varphi)$.

Biến thiên nguyên tố của thế năng tương ứng là :

$$d\mathscr{E}_{P_{fie}} = -\mathscr{P}_{f_{ie}}\,dt = -Ma(R + b\sin\varphi)d\varphi$$

Tổng cộng lại: $\mathscr{E}_P = Mgb\sin\varphi + Ma(-R\varphi + b\cos\varphi)(+\text{cte})$.

Cơ năng của đĩa là một hằng số của chuyển động $\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_P = \text{cte}$.

1) Lúc cân bằng, thế năng của đĩa là cực trị: cho đạo hàm của $\mathscr{E}_P$ đối với φ triệt tiêu, ta có:

$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{g} = \frac{b\cos\varphi}{R + b\sin\varphi}$$

Ta còn có thể viết dưới dạng:

$$b\cos(\alpha+\varphi) = R\sin\alpha, \text{ vậy } b\cos\beta = R\sin\alpha.$$

Chú ý:

Ta có thể tìm lại điều kiện cân bằng bằng cách cho momen của các ngoại lực đối với điểm tiếp xúc I bằng không (điều này có lợi là các lực tiếp xúc chưa biết $\vec{F}$ bị loại khỏi phương trình):

$$\overrightarrow{IG}\wedge(\overrightarrow{Mg}-\overrightarrow{Ma})=\vec{0}$$

và ta tìm lại được: $-bg\cos\varphi + a(R+b\sin\varphi)=0$.

2) Hệ thức có được ở câu hỏi **1)** cho ta $\cos\beta \geq 0$ và rõ ràng là $\cos\beta \leq 1$, từ đó:

$$\sin\alpha \leq \sin\alpha_M = \frac{b}{R}.$$

Áp dụng số: $\sin\alpha_M = \frac{1}{3}$ và $a_M = 3{,}5\ \text{m.s}^{-2}$.

3) Giả thiết: $\alpha < \alpha_M$.

Đặt $\beta_o = \arccos\left(\frac{R}{b}\sin\alpha\right)$, ta có:

$$\varphi_1 = \beta_0 - \alpha \text{ và } \varphi_2 = -\beta_0 - \alpha \text{, từ đó } \varphi_1+\varphi_2 = -2\alpha .$$

4) Áp dụng số: $\alpha \approx 0{,}1$ rad , tức là $\alpha = 5{,}7^\circ$; $\varphi_1 \approx 1{,}17$ rad , tức là 67° ;

$$\varphi_2 \approx -1{,}37 \text{ rad , tức là } -78^\circ .$$

5) Cân bằng của đĩa là bền nếu đối với vị trí cân bằng φ_e đạo hàm bậc hai của $\mathscr{E}_P$ là dương:

$$\left(\frac{d^2\mathscr{E}_P}{d\varphi^2}\right)_{\varphi_e} = -Mb(g\sin\varphi_e + a\cos\varphi_e) > 0$$

điều này dẫn đến (với giả thiết $\cos\varphi_e > 0$): $\text{tg}\ \varphi_e < -\text{tg}\ \alpha$.

Do đó φ_2 tương ứng vị trí cân bằng bền và φ_1 là vị trí cân bằng không bền.

6) Khi cân bằng $\vec{F} + M\vec{g} - M\vec{a} = \vec{0}$

Phân tích $\vec{F}$ thành một thành phần $N\vec{e}_y$ vuông góc và một thành phần $T\vec{e}_x$ tiếp tuyến, ta có:

$$T = Ma \text{ và } N = Mg.$$

Định luật COULOMB quy định $|T| \leq f|N|$, từ đó điều kiện đối với hệ số ma sát trượt là:

$$f \geq \frac{a}{g}, \text{ vậy } f \geq \text{tg}\alpha ,$$

điều này thực tế được nghiệm đúng đối với giá trị cho ở đề bài.

7) Động năng của đĩa được tính nhờ định lí KŒNIG:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}Mv^2(G) + \frac{1}{2}J_G\dot{\varphi}^2 ,$$

với $\vec{v}(G) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{IG}\begin{vmatrix}-(R+b\sin\varphi)\dot{\varphi}\\ b\cos\varphi\,\dot{\varphi}\end{vmatrix}$

và $J_G = J - Mb^2$ (định lí HUYGENS)

Từ đó ta suy ra $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}(J + MR^2 + 2MRb\sin\varphi)\dot{\varphi}^2$, tính đến các giá trị của J và b ta được:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{3}\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2$$

Chú ý:

Ta cũng có thể tính động năng theo cách:

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J_I\dot{\varphi}^2 \text{ với } J_I = J - Mb^2 + MGI^2 .$$

Lấy đạo hàm cơ năng theo thời gian: $\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} + \frac{d\mathscr{E}_P}{d\varphi}\dot{\varphi} = 0$

ước lược cho $MR\dot{\varphi}$ ta có:

$$R\ddot{\varphi}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{3}\sin\varphi\right) + R\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \left(\frac{g}{3}\cos\varphi - a\left(1+\frac{\sin\varphi}{3}\right)\right) = 0 .$$

Đặt $\varphi = \varphi_2 + \varepsilon$ với $\varepsilon \ll \varphi_2$

Loại bỏ các số hạng bậc cao hơn hay bằng hai trong phương trình trên, ta được:

$$R\ddot{\varepsilon}\left(\frac{17}{12}+\frac{2}{3}\sin\varphi_2\right) = \frac{\varepsilon}{3}(g\sin\varphi_2 + a\cos\varphi_2)$$

(Không quên là $\frac{g}{3}\cos\varphi_2 - a\left(1+\frac{\sin\varphi_2}{3}\right) = 0$)

Như vậy ta có một phương trình dạng:

$$\ddot{\varepsilon} = -\Omega^2\varepsilon \text{ với } \Omega^2 = -\frac{g}{R}\frac{\sin\varphi_2 + \text{tg}\alpha\cos\varphi_2}{\frac{17}{4}+2\sin\varphi_2} .$$

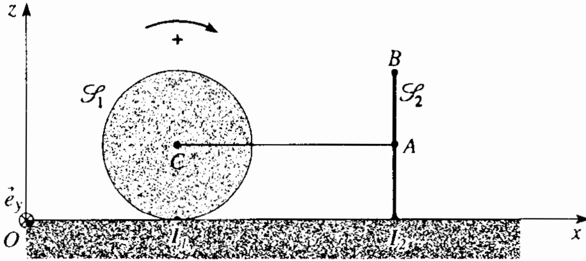
mà nghiệm là một hàm hình sin có vận tốc góc Ω và chu kì $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Áp dụng số: $T = 0{,}97$ s.

Bài toán 3

★ Chuyển động của máy gạt tuyết

Hình vẽ dưới đây vẽ sơ đồ một máy gạt tuyết dịch chuyển trên đường nằm ngang (trong hệ quy chiếu Galilé).



Máy gạt tuyết này gồm một bánh xe $\mathcal{S}_1$ (quán tâm C, bán kính R, khối lượng m phân bố đều theo chu vi và momen quán tính đối với trục là $J = mR^2$) và một bộ phận $\mathcal{S}_2(CABI_2)$ không biến dạng có cùng khối lượng m như bánh xe, khối tâm là A (cho $CA = 2R$; $AI_2 = R$), có chuyển động tịnh tiến song song với trục Ox).

Động cơ gắn với $\mathcal{S}_2$ thực hiện lên bánh xe một ngẫu lực có momen $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$ (Γ là hằng số dương).

Bánh xe có thể quay không ma sát quanh trục của nó và lăn không trượt trên mặt đất. Giả thiết rằng hệ số ma sát trượt f trên mặt đất ở I_1 và I_2 là như nhau và nghiệm đúng $0,7 < f < 1$.

1) Áp dụng:

a) cho toàn bộ, định lí tổng hợp động lực.

b) cho toàn bộ, định lí momen động lượng đối với khối tâm máy gạt tuyết.

c) cho bánh xe $\mathcal{S}_1$, định lí momen động lượng đối với C.

2) Suy ra gia tốc $\ddot{x}$ của máy gạt tuyết.

3) Momen Γ phải nghiệm đúng những điều kiện nào để chuyển động nói ở trên thực tế thực hiện được ? Có thể giả thiết là ở thời điểm đầu cái gạt tuyết đứng yên.

BÀI GIẢI

1) a) Máy gạt tuyết chịu các ngoại lực tác dụng sau đây:

- trọng lượng của máy gạt tuyết $2m\vec{g}$;
- các phản lực của mặt đất ở I_1 và I_2 :

$$T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_z \text{ ở } I_1 \quad \text{và} \quad T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_z \text{ ở } I_2 .$$

Các định luật Coulomb cho ta

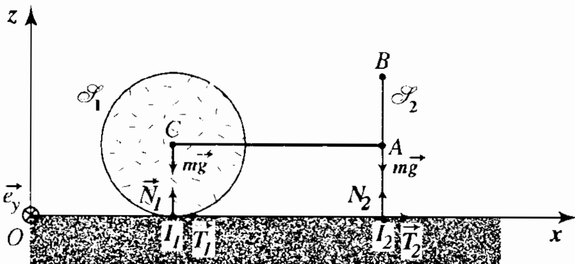
- $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$;
- $T_2 < 0$ và $T_2 = -|T_2| = -fN_2$ vì có trượt ở I_2, sự trượt này là hướng theo chiều dương của (Ox).

Dấu của T_1 là chưa biết và T_1 nghiệm đúng $|T_1| \leq fN_1$ vì bánh xe lăn không trượt trên mặt đất.

Không nên quên rằng ngẫu lực của động cơ là một tác động cơ nội đối với máy gạt tuyết.

Định lí tổng hợp động lực cho ta:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x} = T_1 + T_2 \\ O = N_1 + N_2 - 2mg \end{cases}$$



b) Khối tâm G của cái gạt tuyết nằm ở giữa của đoạn CA ($CG = GA = R$). Momen động lượng của tập hợp G là tổng các momen động lượng của $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ mà ta có thể tính theo định lí KŒNIG:

$$\vec{L}_G = (\overrightarrow{GC} \wedge m\vec{v}(C) + \vec{L}_C(\mathcal{S}_1)^*) + (\overrightarrow{GA} \wedge m\vec{v}(A) + \vec{L}_A(\mathcal{S}_2)^*)$$

vậy $\vec{L}_G = L_C(\mathcal{S}_1)^* = J\omega\vec{e}_y$, vì $\vec{v}(C) = \vec{v}(A)$ là đồng tuyến với $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$ và $\vec{L}_A(\mathcal{S}_2)^* = \vec{0}$, $\mathcal{S}_2$ chuyển động tịnh tiến.

Bánh xe lăn không trượt, vận tốc quay ω của bánh xe liên hệ với vận tốc $\dot{x}$ của C (hay của G vì $\vec{v}(C) = \vec{v}(G)$) theo hệ thức: $\dot{x} = R\omega$.

Vận dụng cho toàn bộ định lí momen động lượng đối với G (trong hệ quy chiếu nghiên cứu hay trong hệ quy chiếu trọng tâm của máy gạt tuyết) ta được:

$$J\dot{\omega}\vec{e}_y = \overrightarrow{GC} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{GI_1} \wedge (T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_z) + \overrightarrow{GA} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{GI_2} \wedge (T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y),$$

từ đó $m\ddot{x} = -T_1 + N_1 - T_2 - N_2$.

c) Cuối cùng áp dụng định lí momen động lượng cho bánh xe ở C trong hệ quy chiếu trọng tâm, chiếu lên Oy, ta có:

$$J\dot{\omega} = mR\ddot{x} = \Gamma - RT_1$$

2) Vì $T_2 = -fN_2$, như vậy ta có bốn phương trình với bốn ẩn số $\ddot{x}$, T_1, N_1 và N_2 : tính toán một chút, ta được:

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{\Gamma}{mR} - gf}{2-f}$$

Ta giả thiết rằng máy gạt tuyết tiến lên theo chiều x dương, vậy cần thiết là:

$$\dot{x} = \ddot{x}t > 0 \text{ vậy } \Gamma > fRmg \text{ (vì } f<1).$$

Ta còn phải nghiệm rằng các định luật COULOMB thực tế là được thỏa mãn. Các phương trình nói trên với giá trị của gia tốc $\ddot{x}$ của máy gạt tuyết, cho phép chúng ta xác định các phản lực N_1 và N_2 và của lực ma sát T_1 :

$$N_2 = mg - \frac{3}{2}m\ddot{x} = \frac{2mg - \frac{\Gamma}{R}}{2-f} \; ; \quad N_1 = 2mg - N_2 = \frac{2mg(1-f) + \frac{\Gamma}{R}}{2-f}$$

$$T_1 = \frac{\Gamma}{R} - m\ddot{x} = \frac{\frac{\Gamma}{R}\left(\frac{4}{3} - f\right) + \frac{2}{3}mgf}{2-f}$$

Các tiếp xúc ở I_1 và I_2 tồn tại trong quá trình chuyển động nếu:

- $N_1 \geq 0$ điều này luôn luôn được nghiệm đúng ;
- $N_2 \geq 0$ điều này dẫn đến $\Gamma \leq 2mgR$.

Điều kiện lăn không trượt ở I_1 xảy ra nếu $|T_1| \leq f N_1$, vì T_1 là dương, nên cũng là nếu $T_1 \leq f N_1$.

Từ đó ta rút ra:

$$\frac{\Gamma}{R}\left(\frac{2}{3} - f\right) \leq mgf\left(\frac{2}{3} - f\right)$$

f là lớn hơn $\frac{2}{3}$, bất phương trình trên cho ta $\Gamma \geq fRmg$.

Cuối cùng máy gạt tuyết có chuyển động xác định như trên nếu momen ngẫu lực của động cơ nghiệm đúng:

$$fRmg \leq \Gamma \leq 2Rmg$$

Bài toán 4

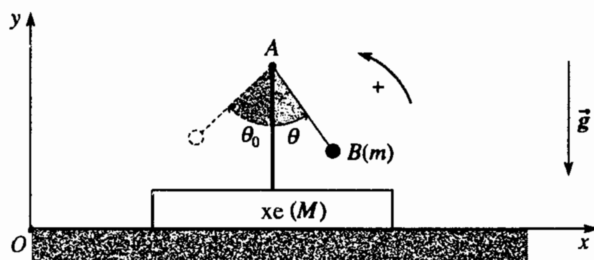
★★ Dao động của một cái xe trên mặt đất

Một cái xe khối lượng M, trên xe có đặt cố định một con lắc treo AB, xe có thể trượt trên mặt đất nằm ngang. Con lắc AB được xem như con lắc đơn, khối lượng m chiều dài l. Hệ quy chiếu trái đất được xem là galilé và người ta bỏ qua tất cả các kiểu ma sát.

Có thể đặt $\alpha = \dfrac{m}{m+M}$

1) a) Người ta đưa con lắc ra khỏi vị trí cân bằng một góc θ_0 (gồm giữa $-\dfrac{\pi}{2}$ và 0) và người ta thả $B(m)$ không chuyền cho hệ vận tốc ban đầu.

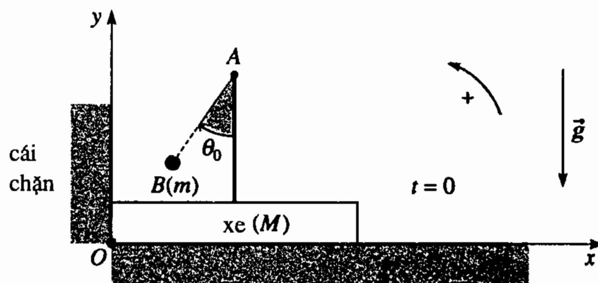
Hãy vận dụng định lí tổng hợp động lực cho toàn bộ, thiết lập hệ thức giữa vận tốc $\dot{x}$ của xe và vận tốc $\dot{\theta}_0$ của con lắc.



b) Mô tả định tính chuyển động của xe phụ thuộc vào vị trí của B.

c) Xe bây giờ đứng yên do một cái chặn và ta thực hiện như ở câu hỏi **1) a)**: người ta đưa con lắc ra khỏi vị trí cân bằng cũng cùng một góc θ_0 và buông B ra mà không truyền tốc độ đầu cho toàn hệ. Từ thời điểm nào thì hệ là giả cô lập (chỉ bao hàm chuyển động nằm ngang)?

Vào cùng thời điểm đó, sự khác nhau giữa tình huống này và tình huống đã nghiên cứu ở **1) a)** là như thế nào? Suy ra hệ thức mới giữa $\dot{x}$ và $\dot{\theta}_0$.



d) Bây giờ hãy suy ra, một cách định tính, hành trình chuyển động của chiếc xe.

Trong tất cả các phần tiếp theo, ta giả thiết rằng xe không bao giờ tiếp xúc với cái chặn.

2) Vận dụng định lí momen động lượng cho con lắc trong hệ quy chiếu gắn liền với chiếc xe. Suy ra hệ thức giữa gia tốc $\ddot{x}$ của chiếc xe và gia tốc góc $\ddot{\theta}$ của con lắc.

3) Nghiên cứu về mặt năng lượng trong hệ quy chiếu trái đất.

a) Tìm biểu thức của động năng của toàn bộ {xe + con lắc}.

b) Tìm biểu thức của thế năng của toàn bộ.

c) Suy ra phương trình vi phân liên hệ $\dot{\theta}$ và $\dot{x}$.

d) Dùng hệ thức có được ở câu hỏi **1)** và phương trình vi phân ở câu **3) c)** để tìm lại phương trình ở câu hỏi **2)**.

4) Bằng cách chỉ xét đến những dao động nhỏ của con lắc, hãy đơn giản hoá những phương trình có được, rồi giải các phương trình đó:

a) Xét đến các điều kiện đầu của câu hỏi **1) a)**;

b) Xét đến các điều kiện đầu của câu hỏi **1) c)**.

BÀI GIẢI

1) a) Các lực ngoại tác dụng lên tập hợp {xe + con lắc} là thẳng đứng. Định lí về tổng hợp động lực áp dụng đối với hệ, chiếu lên trục nằm ngang (Ox) cho ta:

$$(M+m)v_x(G) = M\dot{x} + m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x + l\sin\theta) = \text{cte}$$

Nhưng toàn bộ ban đầu đứng yên: vậy là hằng số bằng không và đưa vào thông số $\alpha = \dfrac{m}{m+M}$, ta được: $\dot{x} + \alpha l\cos\theta\dot{\theta} = 0$ (1).

b) Con lắc dao động quanh đường thẳng đứng và xe cũng dao động quanh vị trí cân bằng ngược pha với con lắc (nếu $\dot{\theta}$ tăng, $\dot{x}$ giảm và ngược lại).

c) Lúc xuất phát, xe cố định đối với cái chặn. Ta biểu diễn lực tiếp xúc nằm ngang là $\vec{F} = F\vec{e}_x$ của cái chặn tác dụng lên xe bằng cách ứng dụng định lí tổng hợp động lực đối với hệ, xét hình chiếu lên (Ox) (với $\dot{x} = 0$ và $\ddot{x} = 0$):

$$F=(M+m)a_x(G)=m\frac{d^2}{dt^2}(l\sin\theta)=ml(\cos\theta\ddot{\theta}-\sin\theta\dot{\theta}^2)$$

Xác định $\ddot{\theta}$ và $\dot{\theta}$ theo θ: muốn vậy, ta vận dụng cho con lắc định lí momen động lượng đối với điểm A (trong trường hợp này là điểm cố định) chiếu lên trục (Oz):

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta\ ,$$

sau đó lấy tích phân hệ thực này từ thời điểm đầu đến một thời điểm nào đó:

$$ml^2\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}-0\right)=mgl\left(\cos\theta-\cos\theta_0\right)$$

Thay thế $\ddot{\theta}$ và $\dot{\theta}$ trong biểu thức của F, ta có:

$$F=mg\sin\theta\left(2\cos\theta_0-3\cos\theta\right).$$

Vì $(2\sin\theta_0-3\cos\theta)$ luôn luôn là dương, F có dấu của $\sin\theta$ và triệt tiêu khi $\theta=0$, điều này tương ứng với thời điểm $t=\frac{T_0}{4}$ (kí hiệu T_0 là chu kì dao động của con lắc khi xe đứng yên). Ở thời điểm này xe rời khỏi cái chặn, con lắc có vận tốc góc:

$$\dot{\theta}_0=\sqrt{\frac{2g}{l}\left(1-\cos\theta_0\right)}.$$

Về sau, hệ sẽ trở lại trường hợp ở câu hỏi 1.a):

$$F=0 \text{ và } \dot{x}+\alpha l\cos\theta\dot{\theta}=\text{cte}A \qquad (1')$$

Ta xác định hằng số A (trong trường hợp này không bằng không) ở thời điểm $\frac{T_0}{4}(\dot{x}=0,\theta=0,\dot{\theta}=\dot{\theta}_0)$:

$$A=\sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$$

d) Chuyển động của hệ {xe + con lắc} tuân theo phương trình:

$$\dot{x}+\alpha l\cos\theta\dot{\theta}=A>0$$

lấy tích phân ta được:

$$x+\alpha l\sin\theta=At+B \ (B=\text{hằng số tích phân})$$

Vì vậy con lắc tiếp tục dao động: xe cũng dao động (ngược với con lắc) tất cả tiến theo chiều x tăng (vì vận tốc trung bình của toàn bộ là dương).

2) Trong hệ quy chiếu gắn với xe, con lắc chịu tác dụng:

- trọng lượng của nó $-mg\vec{e}_y$;
- lực quán tính kéo theo $\vec{F}_{ie}-m\ddot{x}\vec{e}_x$ tác dụng ở B;
- các phản lực của trục ở A mà các thành phần của momen đối với (Oz) là bằng không (không có ma sát).

A
$\vec{F}_{ie}$
B
$m\vec{g}$

Áp dụng định lí momen động lượng đối với điểm A (điểm cố định trong hệ quy chiếu gắn liền với xe) cho con lắc, chiếu lên trục quay(Oz):

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta-m\ddot{x}l\cos\theta\text{ , từ đó } l\ddot{\theta}=-g\sin\theta-\ddot{x}\cos\theta \quad (2)$$

3) a) Ta xem như ở trong hệ quy chiếu galilê của trái đất và ta biểu diễn động năng của toàn bộ:

$$\mathscr{E}_K=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}mv(B)^2$$

với $v(B)^2=(\dot{x}+l\cos\theta\dot{\theta})^2+(l\sin\theta\dot{\theta})^2$. Từ đó:

$$\mathscr{E}_K=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

b) Thế năng được quy về thế năng trọng trường của con lắc:

$$\mathscr{E}_P=-mgl\cos\theta(+\text{cte})$$

c) Vì không có ma sát, năng lượng tổng cộng là một hằng số chuyển động:

$$\mathscr{E}_K+\mathscr{E}_P=\text{cte}\ .$$

d) Lấy đạo hàm hệ thức trên, cùng với hệ thức (1) hay (1'):

$$\dot{x}+\alpha l\cos\theta\dot{\theta}=\text{cte}$$

của câu hỏi 1), sau đó tổ hợp hai hệ thức vừa có được độc giả sẽ tìm lại được phương trình vi phân (2) của câu hỏi 2).

4) a) Khi θ còn nhỏ, các phương trình (1) (hay 1') và (2) được đơn giản lại trở thành:

$$\dot{x}+\alpha l\dot{\theta}=\text{cte}\text{ , từ đó } \ddot{x}=-\alpha l\ddot{\theta},\ l\ddot{\theta}=-g\theta-\ddot{x}$$

từ đó ta suy ra $\ddot{\theta}=-\frac{g}{l(1-\alpha)}\theta=-\frac{g}{l}\frac{m+M}{M}\theta$, có dạng $\ddot{\theta}=\Omega^2\theta$ với $\Omega^2=\frac{g}{l}\frac{m+M}{M}$

b) Nếu chúng ta ở trong các điều kiện ban đầu của câu hỏi 1) a) $\theta=\theta_0,\dot{\theta}=0,\dot{x}=0$ lúc $t=0$), ta có:

$$\theta=\theta_0\cos\Omega t \text{ và } x=-\alpha l\theta+(\text{cte})=-\alpha l\theta_0(\cos\Omega t-1)+x_0$$

(nếu ta giả thiết $x=x_0$ ở thời điểm $t=0$). Xe và con lắc dao động ngược pha với nhau.

c) Nếu chúng ta ở trong các điều kiện ban đầu của câu hỏi 1.c), từ thời điểm $\frac{T_0}{4}$ lúc mà xe rời khỏi cái chặn, ta có:

$$\theta=\frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}\sin\Omega\left(t-\frac{T_0}{4}\right)$$

vì ở thời điểm $\frac{T_0}{4}$:

$$\theta=0 \text{ và } \dot{\theta}=\dot{\theta}_0=-\sqrt{\frac{g}{l}}\theta_0 \text{ (nhớ rằng } \theta_0<0\text{)}$$

Chu kì T_0 của những dao động nhỏ của con lắc khi xe không chuyển động là bằng $T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ta suy ra:

$x=At+B-\alpha l\theta$ (A và B là những hằng số xác định ở câu hỏi 1) d))

$$\text{vậy: } x=\alpha l\theta_0\left[\left(t-\frac{T_0}{4}\right)-\frac{1}{\Omega}\sin\Omega\left(t-\frac{T_0}{4}\right)\right]+x_0$$

nếu giả thiết $x=x_0$ ở thời điểm $\frac{T_0}{4}$.

Ta nhận xét rằng xe dao động ngược pha với con lắc tất cả tiến lên theo chiều x tăng: x luôn luôn dương, xe không bao giờ va chạm với cái chặn sau thời điểm $\frac{T_0}{4}$.

Bài toán 5

★★ Lăn và trượt của một hệ trên một mặt phẳng

Theo thi tuyển vào trường Mỏ và Cầu cống.

Ta xét trong hệ quy chiếu Galilé, một hệ như sau:

• $ABCD$ là khung vỏ cứng cấu tạo bởi các thanh hình trụ đồng nhất, giống nhau, AC và BD song song và liên kết với nhau bởi các thanh hình trụ đồng nhất MN hàn với AC và BD ở M và N. M và N là những điểm giữa tương ứng của AB và BD. Khung $ABCDMN$ có khối lượng m;

• $\mathcal{S}$ là một hình cầu đồng nhất, tâm O_1, khối lượng m, bán kính r và momen quán tính $I = \frac{2}{5}mr^2$ đối với trục AB gắn với hình cầu: trục (AB) này quay quanh hai điểm A và B trên khung.

• $\mathcal{K}$ là một hình trụ đồng nhất tâm O_2 khối lượng m, cùng bán kính r với hình cầu và có momen quán tính $J = \frac{1}{2}mr^2$ so với trục (CD) gắn với hình trụ; trục (CD) này (song song với AB) quay quanh C và D nằm trên khung.

Trục (O_1O_2) đi qua quán tâm G của hệ.

Ta giả thiết trong toàn bộ bài toán này, các chỗ tiếp xúc ở A, B, C và D của các trụ quay đều là không có ma sát. Kí hiệu g là môđun của gia tốc trọng trường.

Hệ được đặt không có vận tốc ban đầu lên một mặt phẳng ngiêng một góc α so với mặt nằm ngang và ta chỉ xét đến các chuyển động tịnh tiến thẳng của vỏ khung song song với đường có độ nghiêng lớn nhất của mặt phẳng.

Ta kí hiệu f là hệ số ma sát trượt của hình cầu và hình trụ trên mặt phẳng; hệ số này có cùng giá trị đối với hình cầu và hình trụ: người ta bỏ qua ma sát lăn trên mặt phẳng của hình cầu và hình trụ.

1) a) Áp dụng các hệ thức cơ bản của động lực học cho vỏ khung, cho hình cầu và cho hình trụ.

b) Tính các biểu thức của vận tốc trượt của hình trụ và hình cầu.

c) Từ đó suy ra các biểu thức về gia tốc của quán tâm G của hệ theo các giá trị của α. Tính các giá trị α_1 và α_2 ứng với một biến thể của định luật gia tốc.

Tính gia tốc a của hệ đối với $\alpha = 45^0$ và đối với $\alpha = 60^0$.

Cho biết:

$f = 0{,}25$; $m = 500$g; $r = 5$ cm và $g = 10$ m.s^{-2}.

2) Tính các thành phần X_1 và X_2 trên trục (Ox) của các phản lực thực hiện lên vỏ khung tương ứng bởi hình cầu và bởi hình trụ, đối với tất cả các giá trị của α $(\alpha < 90^0)$.

3) Tính theo các giá trị của α công của các lực ma sát giữa thời điểm đầu và thời điểm t.

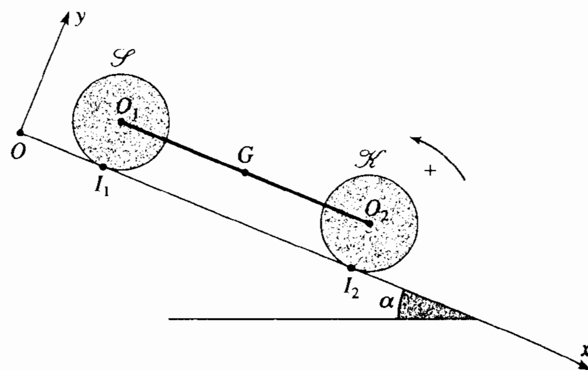
Ta sẽ thực hiện phép tính này:

a) Trực tiếp xuất phát từ định nghĩa công của một lực;

b) Bằng cách áp dụng định lí về động năng.

Áp dụng số đối với $\alpha = 30^0$ và đối với $\alpha = 45^0$ với $t = 1$s.

a. Nhìn từ trên xuống

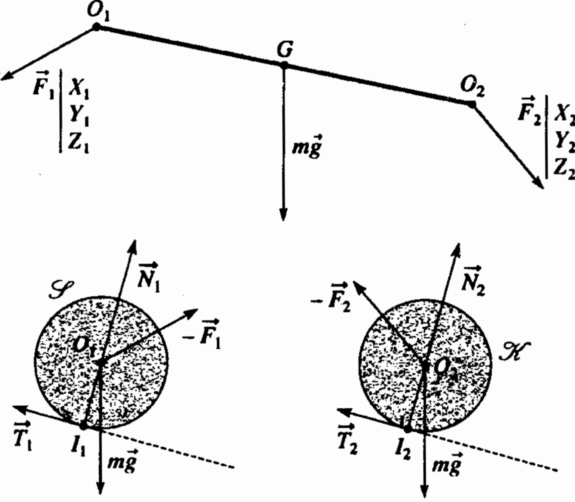


b. Nhìn từ một bên

BÀI GIẢI

1) a) Ta có thể biểu diễn trên các sơ đồ dưới đây những lực tác dụng tương ứng lên vỏ khung, hình cầu và hình trụ. Ở các trụ quay, các tác động tiếp xúc của hình cầu lên khung được xác định bởi một lực $\vec{F}_1$ và một momen $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,O_1}$ đối với O_1 (ta không vẽ ở sơ đồ).

Vì các liên kết đều không có ma sát, các thành phần của $\mathcal{M}_{1,O_1}$ trên trục (Oz) là bằng không. Cũng theo cách đó, tiếp xúc hình trụ - khung được đặc trưng bởi $\vec{F}_2$ và $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,O_2}$ (với $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,O_2}.\vec{e}_z=\vec{O}$)



Ta vận dụng định lí tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu galilé (bằng cách chiếu lên trục (Ox) và (Oy)), sau đó vận dụng định lí momen động lượng trong hệ quy chiếu trọng tâm riêng cho mỗi hệ đã xét (chiếu lên trục (Oz)):

- đối với khung:

$$m\vec{a}(G)=m\vec{g}+\vec{F}_1+\vec{F}_2 \text{ vậy } \begin{cases} m\ddot{x}=mg\sin\alpha+X_1+X_2 & (1)\\ 0=-mg\cos\alpha+Y_1+Y_2 \end{cases}$$

$$\vec{0}=[(\overrightarrow{GO_1}\wedge\vec{F}_1+\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,O_1})+(\overrightarrow{GO_2}\wedge\vec{F}_2+\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,O_2})].\vec{e}_z$$

(vì khung không quay), từ đó $Y_1=Y_2$.

Ta rút ra: $Y_1=Y_2=\frac{1}{2}mg\sin\alpha$ (2);

- đối với hình cầu: Nếu hình cầu trượt, nó trượt xuống. Vậy ta có thể đặt:

$$\vec{T}_1=-T_1\vec{e}_x \text{ với } T_1>0$$

$$m\vec{a}(O_1)=m\vec{a}(G)=m\vec{g}+\vec{T}_1+\vec{N}_1-\vec{F}_1\text{, vậy } \begin{cases} m\ddot{x}=mg\sin\alpha-T_1-X_1 & (3)\\ 0=-mg\cos\alpha+N_1-Y_1 & (4)\end{cases}$$

$$I\ddot{\theta}_1=\frac{2}{5}mr^2\ddot{\theta}_1=-rT_1 \quad (5);$$

- đối với hình trụ, giữ nguyên những quy ước trên:

$$m\vec{a}(O_2)=m\vec{a}(G)=m\vec{g}+\vec{T}_2+\vec{N}_2-\vec{F}_2 \text{ vậy } \begin{cases} m\ddot{x}=mg\sin\alpha-T_2-X_2 & (6)\\ 0=-mg\cos\alpha+N_2-Y_2 & (7)\end{cases}$$

$$J\ddot{\theta}_2=\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}_2=-rT_2 \quad (8)$$

b) Các tốc độ trượt là:

- đối với hình cầu: $\vec{v}_{g_1}=\vec{v}(O_1)+\dot{\theta}_1\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{O_1I_1}$, vậy $\vec{v}_{g_1}=(\dot{x}+r\dot{\theta}_1)\vec{e}_x$;
- đối với hình trụ: $\vec{v}_{g_2}=\vec{v}(O_2)+\dot{\theta}_2\vec{e}_z\wedge\overrightarrow{O_2I_2}$, vậy $\vec{v}_{g_2}=(\dot{x}+r\dot{\theta}_2)\vec{e}_x$.

c) Cộng các phương trình (1), (3) và (6) ta có:

$$3m\ddot{x}=3mg\sin\alpha-T_1-T_2 \quad (9).$$

Từ các phương trình (2), (4) và (7) ta suy ra:

$$N_1=N_2=\frac{3}{2}mg\cos\alpha.$$

- **Giả sử là $\mathcal{K}$ và $\mathcal{S}$ lăn không trượt**

Khi đó ta có: $r\ddot{\theta}_1=r\ddot{\theta}_2=-\ddot{x}$

Khử T_1 và T_2 ở các phương trình (5), (8) và (9) ta có:

$$\ddot{x}=\ddot{x}_1=\frac{10}{13}g\sin\alpha.$$

Kiểu chuyển động này là còn xảy ra khi $T_1\le fN_1$ và $T_2\le fN_2$ (nhớ rằng T_1, T_2, N_1 và N_2 trong bài toán này là dương):

$T_1\le fN_1$ dẫn đến $\text{tg}\alpha\le\frac{39}{8}f$;

$T_2\le fN_2$ dẫn đến $\text{tg}\alpha\le\frac{39}{10}f$.

Giá trị thứ hai nhỏ hơn giá trị thứ nhất, vậy ta phải giả thiết $\alpha\le\alpha_1$ xác định bởi $\text{tg}\alpha\le\frac{39}{10}f$.

Nếu α vượt quá giá trị α_1, hình trụ sẽ trượt.

- **Giả sử $\mathcal{K}$ trượt và $\mathcal{S}$ lăn không trượt:**

Khi đó ta có: $r\ddot{\theta}_1=-\ddot{x}$ và $T_2=fN_2$.

Khử T_1 và T_2 trong phương trình (9) ta có:

$$\ddot{x}=\ddot{x}_2=\frac{15}{17}g\left(\sin\alpha-f\frac{\cos\alpha}{2}\right).$$

$\mathcal{S}$ lăn không trượt khi mà $T_1\le fN_1$, điều này dẫn đến $\text{tg}\alpha\le\text{tg}\alpha_2=\frac{19}{4}f$.

Kiểu chuyển động này chỉ có thể xảy ra khi độ nghiêng của mặt phẳng là bao gồm giữa α_1 và α_2.

- **Đối với $\alpha>\alpha_2$, $\mathcal{S}$ và $\mathcal{K}$ trượt.**

Ta có $T_1=fN_1$ và $T_2=fN_2$, từ đó ta rút ra:

$$\ddot{x}=\ddot{x}_3=g(\sin\alpha-f\cos\alpha).$$

Áp dụng số: $\alpha_1\approx 44^\circ$; $\alpha_2\approx 50^\circ$.

Khi $\alpha=45^\circ$, $\mathcal{K}$ trượt, $\mathcal{S}$ lăn không trượt: $a=\ddot{x}_2=5{,}46\ \text{m.s}^{-2}$.

Khi $\alpha=60^\circ$, $\mathcal{K}$ và $\mathcal{S}$ trượt: $a=\ddot{x}_3=7{,}41\ \text{m.s}^{-2}$.

2) Các thành phần X_1 và X_2 của các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ được tính xuất phát từ (3) và (6):

	$\alpha < \alpha_1$	$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$	$\alpha_2 < \alpha$
X_1	$-\frac{1}{13} mg\sin\alpha$	$-\frac{1}{17}\left(4\sin\alpha - \frac{21}{3} f\cos\alpha\right)$	$-\frac{1}{2} mgf\cos\alpha$
X_2	$-\frac{2}{13} mg\sin\alpha$	$-\frac{1}{17}(-2\sin\alpha + 18f\cos\alpha)$	$-\frac{1}{2} mgf\cos\alpha$

3) Ta xác định công W_f của các lực ma sát T_1 và T_2

a) Bằng cách tính trực tiếp.

Giữa hai thời điểm gần nhau, ta có:

$$dW_f = -(T_1 v_{g_1} + T_2 v_{g_2})dt$$

Kí hiệu v_{g_1} và v_{g_2} là các số đo đại số của vận tốc trượt của $\mathscr{S}$ và $\mathscr{K}$ trên mặt phẳng nghiêng. Do đó:

• đối với $\alpha \le \alpha_1$: $v_{g_1} = v_{g_2}$ và $W_f = 0$;

• đối với $\alpha < \alpha_1 \le \alpha_2$:

$$v_{g_1} = 0, \quad v_{g_2} = \dot{x} + r\dot{\theta}_2, \quad T_2 = \frac{3}{2} fmg\cos\alpha,$$

$$W_f = -\frac{3}{4} fmg\cos\alpha t^2\left(\frac{15}{17} g\sin\alpha - \frac{117}{34} fg\cos\alpha\right);$$

• đối với $\alpha_2 < \alpha$:

$$v_{g_1} = \dot{x} + r\dot{\theta}_1, v_{g_2} = \dot{x} + r\dot{\theta}_2, T_1 = T_2 = \frac{3}{2} fmg\cos\alpha,$$

$$W_f = -\frac{3}{4} f\, mg\cos\alpha\, t^2\left(2g\sin\alpha - \frac{35}{4} f\, g\cos\alpha\right).$$

b) Dùng định lí động năng:

$$\mathscr{E}_K(t) - \mathscr{E}_K(O) = W_{\text{trọng lượng}} + W_f,$$

với:

$$\mathscr{E}_K = \mathscr{E}_{K(khung)} + \mathscr{E}_{K(\mathscr{S})} + \mathscr{E}_{K(\mathscr{K})}$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I\dot{\theta}_1^2\right) + \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}_2^2\right)$$

và $W_{\text{trọng lượng}} = 3mg\sin\alpha x$, từ đó :

$$W_f = \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} mr^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{5} mr^2\dot{\theta}_2^2 - 3mg\sin\alpha x$$

Rõ ràng là ta tìm lại được các kết quả của câu hỏi **3) a)** khi xét đến các trường hợp khác nhau.

Áp dụng số : $\alpha = 30^\circ < \alpha_1$; $W_f = 0J$

$\alpha = 45^\circ$ là ở giữa α_1 và α_2 ; $W_f = -0{,}105J$.

Công này rõ ràng là âm. Cơ năng ($\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P,\text{(trọng lượng)}}$) của hệ giảm để tiêu tán dưới dạng nhiệt.

Bài toán 6

★★ Con chuột trong cái bánh xe

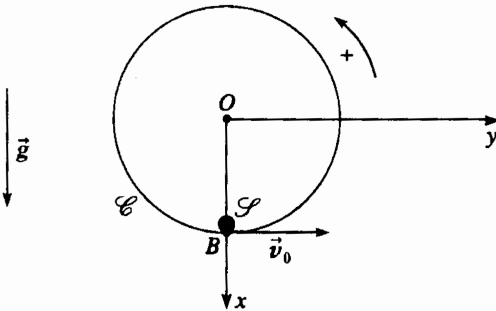
Theo thi tuyển vào Mỏ – Cầu cống.

Hệ quy chiếu trái đất được xem là galilé và gắn với một cơ sở trực chuẩn $(O;\ x,\ y,\ z)$. Gia tốc trọng trường kí hiệu là $\vec{g} = g\vec{e}_x$. Một bánh xe $\mathscr{C}$ tâm O, bán kính a, và khối lượng M phân bố một cách đồng nhất theo chu vi, có thể quay quanh trục (cố định) trùng với trục (Oz).

Liên kết giữa bánh xe và trục xem như hoàn chỉnh, đặc biệt là không ma sát. Momen quán tính của bánh xe đối với trục quay là $J = Ma^2$.

Ở thời điểm đầu ($t = 0$), bánh xe không có vận tốc so với hệ quy chiếu trái đất và một con chuột $\mathscr{S}$, xem như một chất điểm có khối lượng m, nằm ở điểm B, điểm thấp nhất của bánh xe.

Theo cách gần như tức thời, $\mathscr{S}$ đạt được vận tốc v_0 so với bánh xe $\mathscr{C}$: bánh xe hầu như không quay, nhưng ở thời điểm $t = 0^+$ bánh xe có vận tốc góc là ω_0.



1) Vận dụng định lí momen động lượng đối với hệ bao gồm bánh xe và con chuột, hãy biểu diễn ω_0 phụ thuộc m, M, a và v_0.

Ở một thời điểm t về sau, bánh xe quay được một góc θ và con chuột $\mathscr{S}$ là ở S, đặc trưng bởi $\alpha = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$. Con chuột vẫn có vận tốc tương đối đối với bánh xe với môđun không đổi là v_0. Thừa nhận là tác động tiếp xúc của bánh xe lên con chuột quy về một lực $\vec{R}$ tác dụng lên điểm có con chuột.

2) Viết theo hai cách khác nhau vận tốc của con chuột trong hệ quy chiếu galilé $(O;\ x,\ y,\ z)$, tìm hệ thức giữa $\ddot{\theta}$ và $\ddot{\alpha}$.

3) Suy ra hệ thức liên hệ của đại lượng $\alpha, \ddot{\alpha}, M, m, g$ và a ở thời điểm t. Để làm việc này, ta áp dụng cho hệ bánh xe - con chuột, trong hệ quy chiếu trái đất, định lí momen động lượng đối với O, ở thời điểm t. Lấy tích phân hệ thức tìm được trong khoảng từ $t = 0^+$ đến t nào đó, làm chính xác biểu thức của $\dot{\alpha}$ ở thời điểm ban đầu.

4) Giả thiết rằng $t > 0^+$. Áp dụng định lí động năng cho tập hợp bánh xe - con chuột ta được gì? Vận dụng định lí tổng hợp động lượng cho riêng một mình con chuột, hãy tìm lại hệ thức giữa $\alpha, \ddot{\alpha}, M, m, g$ và a của câu hỏi 3).

5) Bất đẳng thức nào mà môđun v_0 phải thỏa mãn để con chuột có thể đạt đến điểm cao nhất của bánh xe?

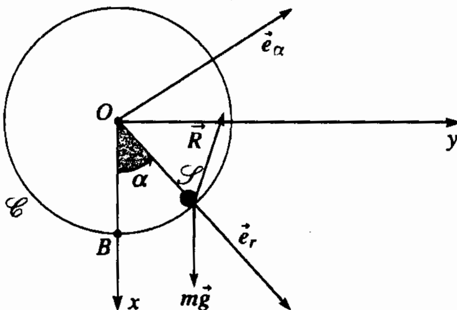
BÀI GIẢI

Ta luôn luôn xem như ở trong hệ quy chiếu galilé trái đất.

Ta xét ở một thời điểm bất kì, các thành phần trên (Oz) của các momen động lượng ở O:

- của bánh xe: $J\dot{\theta} = Ma^2\dot{\theta}$;
- của con chuột: $(\overrightarrow{OS} \wedge m\vec{v}(S)).\vec{e}_z = Ma^2\dot{\alpha}$, vì:

$$\overrightarrow{OS} = a\vec{e}_r \text{ và } v(S,\ \text{chuột}) = a\dot{\alpha}\vec{e}\alpha$$



Vận dụng cho toàn bộ $\{\mathscr{C} + \mathscr{S}\}$ định lí về momen động lượng ở O khi chiếu lên trục (Oz).

Ngoại lực duy nhất mà thành phần của momen lên trục (Oz) khác không là trọng lượng của con chuột, ta có:

$$Ma^2\ddot{\theta} + ma^2\ddot{\alpha} = -mga\sin\alpha \quad (1)$$

1) Lấy tích phân hệ thức (1) giữa thời điểm $t = 0^-$ (bánh xe và con chuột đứng yên) và thời điểm $t = 0^+$ (bánh xe quay với vận tốc ω_0 và con chuột đạt vận tốc $(v_0 + a\omega_0) = a\dot{\alpha}_0$ trong hệ quy chiếu trái đất):

$$(Ma^2\omega_0 + ma(v_0 + a\omega_0)) - 0 = -\int_{t=0^-}^{t=0^+} mga\sin\alpha\, dt = 0$$

Vế thứ hai thực tế là bằng không, vì trong thời gian "rất ngắn" này cả bánh xe, cả con chuột không có dịch chuyển nào.

Ta suy ra: $$\omega_0 = -\frac{v_0}{a}\frac{m}{M+m}$$

2) Ta đã dùng cách hợp thành vận tốc ở câu hỏi 1), ở thời điểm đầu. Ở một thời điểm nào đó, ta có một hệ thức tương tự:

$$a\dot{\alpha} = v_0 + a\dot{\theta},$$

từ đó, lấy đạo hàm: $\ddot{\alpha} = \ddot{\theta}$.

3) Thay thế $\ddot{\theta}$ và $\ddot{\alpha}$ trong hệ thức (1) ta có:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{m}{M+m}\frac{g}{a}\sin\alpha \qquad (2).$$

Nhân từng vế với $\dot{\alpha}$, rồi lấy tích phân giữa thời điểm $t = 0^+$ và thời điểm t bất kì, ta có:

$$\frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}^2(0^+)) = \frac{m}{M+m}\frac{g}{a}(\cos\alpha - 1) \qquad (3)$$

với $\dot{\alpha}(0^+) = \frac{v_0}{a} + \omega_0 = \frac{v_0}{a}\frac{M}{M+m}$.

4) Đặt $\vec{R} = -N\vec{e}_r + T\vec{e}_a$ $(N > 0)$

Động năng của toàn bộ $\{\mathscr{C} + \mathscr{S}\}$ là :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(a\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{2}Ma^2\left(\dot{\alpha} - \frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2$$

Áp dụng cho toàn bộ $\{\mathscr{C} + \mathscr{S}\}$ định lí về công suất động năng:

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \mathscr{P}_{ext} + \mathscr{P}_{int} = m\vec{g}.\vec{v}\ (S,\text{ chuột}) + \vec{R}.\vec{v}\ (S,\text{ chuột}) + (-\vec{R}).\vec{v}\ (S,\text{ bánh xe}).$$

Biết rằng $\vec{v}$ (S, chuột) = $a\dot{\alpha}\vec{e}_x$ và $\vec{v}$ (S, bánh xe) = $a\dot{\theta}e_\alpha$, ta suy ra :

$$Ma^2\left(\dot{\alpha} - \frac{v_0}{a}\right)\ddot{\alpha} + ma^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = -mga\sin\alpha\dot{\alpha} + Tv_0 \quad (4)$$

Định lí tổng hợp động lực áp dụng cho con chuột, chiếu lên $\vec{e}_r$ và $\vec{e}_\alpha$ cho ta:

$$\begin{cases} -ma\dot{\alpha}^2 = -N + mg\cos\alpha & (5) \\ ma\ddot{\alpha} = T - mg\sin\alpha & (6). \end{cases}$$

và khử T giữa (4) và (6) ta có lại được hệ thức (2).

5) Hệ thức (3) cho ta thấy rằng khi α tăng, $\dot{\alpha}^2$ giảm: điều kiện giới hạn để con chuột đạt điểm cao nhất của bánh xe là: $\dot{\alpha} = 0$ với $\alpha = \pi$, từ đó:

$$\dot{\alpha}^2(0^+)_{\lim} = \left(\frac{v_0\lim}{a}\frac{M}{M+m}\right)^2 = 4\frac{m}{M+m}\frac{g}{a}$$

vậy $$v_0 \geq v_0\lim = 2\sqrt{ga\frac{m(M+m)}{M^2}}.$$

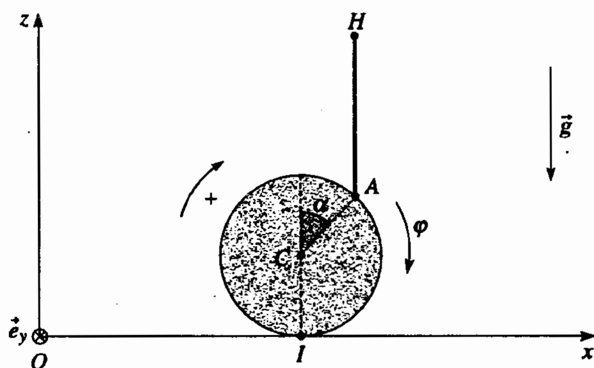
Bài toán 7

★★ Cân bằng của chú hề trên quả bóng

Theo thi tuyển vào Mỏ – Cầu cống

Một quả bóng hình cầu bán kính R, cứng, khối lượng m phân bố đều trên bề mặt có momen quán tính $J = \frac{2}{3}mR^2$ đối với đường kính, lăn không trượt trên mặt đất nằm ngang sao cho tâm của nó giữ nguyên trong mặt (Oxz) của một hệ quy chiếu galilé $\mathscr{R}$ mà (Oz) kí hiệu đường thẳng đứng hướng lên trên.

Cường độ trọng trường là g. Hệ số ma sát trượt trên mặt đất (Ox) là không đổi và bằng f.



Ở thời điểm đầu $t = 0$, tâm C của quả bóng đứng yên có các tọa độ là $x = y = 0$ và $z = R$.

Một chú hề có hai bàn chân để ở điểm A của quả bóng nằm trong mặt phẳng (Oxz) sao cho đường thẳng CA tạo nên một góc α với đường thẳng đứng. Chú hề đi hay chạy theo những bước nhỏ trên quả bóng theo hướng lên điểm cao nhất: ở mọi thời điểm đường thẳng tức thời CA tạo nên một góc α không đổi so với đường thẳng đứng.

Chú hề được xem như vật rắn khối lượng M có khối tâm H: AH luôn luôn thẳng đứng; $AH = h = 2R$.

Người ta bỏ qua quán tính của các phần tử linh động của chú hề khi đi hay khi chạy bước nhỏ sao cho chuyển động của chú lùn trong $\mathscr{R}$ là chuyển động tịnh tiến.

Kí hiệu $\vec{v}$ và $\vec{a}$ tương ứng là vận tốc và gia tốc của C trong $\mathscr{R}$. Sự quay của quả bóng trong $\mathscr{R}$ được tính là dương theo (Oy) và được xác định bởi góc φ.

1) Chuyển động học và động học

a) Cho biết vận tốc $\vec{v}(H)$ và gia tốc $\vec{a}(H)$ của H trong $\mathscr{R}$. Từ đó suy ra vận tốc $\vec{v}(G)$ và gia tốc $\vec{a}(G)$ của khối tâm G của hệ {chú hề + quả bóng} trong chuyển động của khối tâm so với $\mathscr{R}$.

b) Tìm hệ thức nói lên sự lăn không trượt của quả bóng ở điểm tiếp xúc I với mặt đất.

c) Tìm vận tốc của chú hề so với bề mặt của quả bóng mà chú hề tiếp xúc.

d) Xác định trong $\mathscr{R}$ momen động lực $\vec{D}_I$ đối với I của tập hợp {chú hề + quả bóng} theo hàm của R, v, m, M và α.

2) Động lực học

a) Tính gia tốc a của điểm C phụ thuộc vào m, M, g và α. Tính trị số a khi $M = 60$ kg; $m = 6$ kg; $R = 0{,}5$ m; $a = 5$; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

b) Tính các thành phần tiếp tuyến $\vec{T}$ và pháp tuyến $\vec{N}$ của phản lực của mặt đất lên quả bóng và chứng minh rằng nếu $f = 0{,}2$ không thể có trượt lúc xuất phát cũng như ở một thời điểm sau đó.

c) Chú hề không thể chạy với bước nhỏ với tốc độ trên 2 m.s^{-1} so với bề mặt quả bóng không. Sau một thời gian t_0 nào thì đạt được vận tốc đó?

Hỏi khoảng cách L mà quả bóng đã lăn được? Áp dụng tính số. Điều gì xảy ra tiếp theo?

d) Công suất cực đại hữu ích $\mathscr{P}_u$ mà chú hề cung cấp là bao nhiêu, nghĩa là công suất cung cấp để tăng động năng của hệ {chú hề + quả bóng} trong $\mathscr{R}$? Tính áp dụng số.

BÀI GIẢI

1) a) Các vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{AH}$ không thay đổi trong quá trình chuyển động, ta suy ra:

$$\vec{v}(H) = \vec{v}(C) = v\vec{e}_x \text{ và } \vec{a}(M) = \vec{a}(C) = a\vec{e}_x.$$

Khối tâm G được xác định bởi:

$$(m+M)\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OC} + M\overrightarrow{OH}.$$

Vậy lấy đạo hàm ta có:

$$\vec{v}(G) = v\vec{e}_x \text{ và } \vec{a}(G) = a\vec{e}_x$$

b) Vì quả bóng lăn không trượt, ta có:

$$\vec{0} = \vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \dot{\varphi}\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{CI}, \text{ từ đó } v = R\dot{\varphi}$$

c) Tính hiệu giữa các vận tốc $\vec{v}$ (A, chú hề) của chú hề ở A và $\vec{v}$ (A, quả bóng) của điểm A của quả bóng; biết rằng

$$\vec{v}\,(A, \text{chú hề}) = v\vec{e}_x;$$

$$\vec{v}\,(A, \text{quả bóng}) = \vec{v}(C) + \dot{\varphi}\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{CA}$$

Ta có: $\vec{v}$ (*A*, chú hề) - $\vec{v}$ (*A*, quả bóng) $\begin{vmatrix} -v\cos\alpha \\ 0 \\ v\sin\alpha \end{vmatrix}$

Ta có thể nhận xét rằng giá trị vận tốc tương đối của chú hề so với quả bóng là bằng v.

d) Momen động lực của toàn hệ có thể tính như sau:

• tính trực tiếp, vận dụng định lí KŒNIG cho chú hề và quả bóng: ta có:

$$\vec{D}_{I,\text{ chú hề}} = \vec{D}^*_{H,\text{ chú hề}} + \overrightarrow{IH} \wedge M\vec{a}(H)$$

với $\vec{D}^*_{H,\text{ chú hề}} = 0$ vì chú hề chuyển động tịnh tiến.

$\vec{D}_{I,\text{ quả bóng}} = J\ddot{\varphi}\vec{e}_y + \overrightarrow{IC} \wedge m\vec{a}(C)$, từ đó

$$\vec{D}_I = \vec{D}_{I,\text{ chú hề}} = \vec{D}_{I,\text{ quả bóng}} = J\ddot{\varphi}\vec{e}_y + (M\overrightarrow{IH} + m\overrightarrow{IC}) \wedge a\vec{e}_x,$$

vậy $\vec{D}_I = [J\ddot{\varphi} + (M(3+\cos\alpha) + m)Ra]\vec{e}_x$.

Biết rằng $a = R\ddot{\varphi}$ và $J = \frac{2}{3}mr^2$:

$$\vec{D}_I = \left[\frac{5}{3}m + (3+\cos\alpha)M\right]Ra\vec{e}_x;$$

• xuất phát từ momen động lượng đối với *I* của toàn hệ. Các momen động lượng khác nhau là:

$$\vec{L}_{I,\text{ chú hề}} = \overrightarrow{IH} \wedge M\vec{v}(H)$$

$$\vec{L}_{I,\text{ quả bóng}} = J\dot{\varphi}\vec{e}_y + \overrightarrow{IC} \wedge m\vec{v}(C)$$

và của toàn bộ:

$$\vec{L}_I = \vec{L}_{I,\text{ chú hề}} + \vec{L}_{I,\text{ quả bóng}} = \left[\frac{5}{3}m + (3+\cos\alpha)M\right]Rv\vec{e}_x$$

Lấy đạo hàm, nhớ rằng phép lấy đạo hàm thực hiện đối với điểm tiếp xúc hình học *I* là điểm chuyển động, ta có:

$$\vec{D}_I = \frac{d\vec{L}_I}{dt} + (M+m)\vec{v}(I) \wedge \vec{v}(G)$$

Nhưng khối tâm *G* và điểm tiếp xúc hình học *I* có cùng vận tốc $v\vec{e}_x$; vậy ta có:

$$\vec{D}_I = \frac{d\vec{L}_I}{dt}.$$

ta tìm lại được kết quả như trước đây.

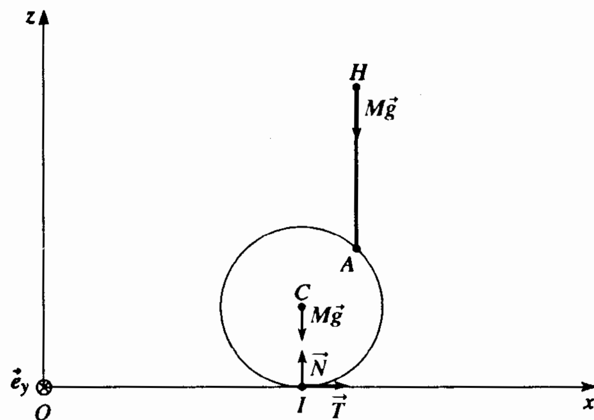
2) a) Các tác động ngoại duy nhất tác dụng lên toàn hệ {chú hề + quả bóng} là phản lực tiếp xúc của đất lên quả bóng (mà momen đối với *I* là không) và các trọng lượng: định lí momen động lực áp dụng đối với *I* cho toàn hệ, chiếu lên (*Oy*) cho ta:

$$\vec{D}_I = \overrightarrow{IC} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{IH} \wedge M\vec{g} = \overrightarrow{IH} \wedge M\vec{g},$$

Từ đó rút ra:

$$a = \frac{Mg\sin\alpha}{\frac{5}{3}m(3+\cos\alpha)M}$$

Áp dụng số: $a = 0{,}2\ \text{m.s}^{-2}$.



b) Định lí tổng hợp động lực áp dụng cho toàn hệ {chú hề + quả bóng} chiếu lên (*Ox*) và (*Oz*) cho ta:

$$\begin{cases} T = (m+M)a \\ N = (m+M)g \end{cases}$$

Quả bóng lăn không trượt trên mặt đất nếu $|T| \le f|N|$ ở đây điều này dẫn đến $a \le fg$. Với các giá trị bằng số đã cho, điều này luôn luôn được nghiệm đúng.

c) Gia tốc *a* là không đổi, ta suy ra $v = at$.

Nhưng v cũng là môđun của vận tốc chú hề so với quả bóng: vận tốc $2\ \text{m.s}^{-1}$ đạt được sau một thời gian là:

$$t_0 = \frac{v}{a} = 9{,}75s.$$

Trong thời gian đó, quả bóng đã đi được đoạn đường:

$$L = \frac{1}{2}at_0^2 = 9{,}75\ \text{m}$$

Khi chú hề đạt được vận tốc cực đại, vận tốc quả bóng tiếp tục tăng và chú hề không thể điều chỉnh vận tốc so với quả bóng; góc α đặc trưng cho vị trí của chú hề tăng lên và chú hề sẽ kết thúc bằng cách rơi xuống. Muốn tránh điều "bất tiện" này, chú hề phải leo lên đỉnh của quả cầu $\alpha = 0$ trước khi quả cầu dịch chuyển quá nhanh.

d) Động năng của hệ {chú hề + quả bóng} bằng:

$$\mathscr{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2}_{\text{chú hề}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2\right)}_{\text{quả bóng}} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{5}{3}m\right)v^2.$$

Vận dụng định lí động năng cho toàn hệ {chú hề + quả bóng} biết rằng không có lực ngoài nào làm việc (không phải trọng lượng, không phải lực tiếp xúc mặt đất - quả bóng vì là lăn không trượt). Nếu bỏ qua tất cả tiêu tán năng lượng bên trong, ta có:

$$\mathscr{P}_u = \frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = \left(M + \frac{5}{3}m\right)va$$

Áp dụng số: Giá trị cực đại của $\mathscr{P}_u$ có được khi $v = 2\text{m.s}^{-1}$, từ đó:

$$\mathscr{P}_{u\max} = 28{,}7\ \text{W}.$$

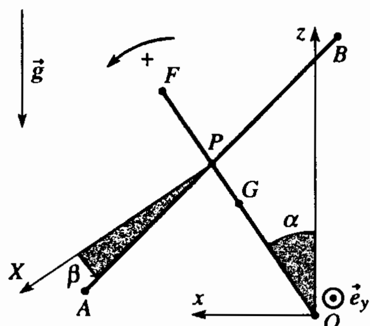
Bài toán 8

★★ Cân bằng của người làm xiếc trên dây

Theo đề thi tuyển đặc biệt

Trong hệ quy chiếu trái đất $(O; x, y, z)$ giả thiết là galilé, người ta nghiên cứu chuyển động của người làm xiếc trên dây $\mathscr{S}_1$, người đó cố giữ thăng bằng trên một dây trùng với trục (Oy) nhờ dùng "gậy thăng bằng" $\mathscr{S}_2$.

Ta gọi "làm ổn định" là làm một chuỗi thao tác nhờ đó người làm xiếc giữ được một góc α nhỏ so với đường thẳng đứng (Oz) hướng lên trên.



Người ta sơ đồ hóa người làm xiếc trên dây $\mathscr{S}_1$ bằng một thanh OF đồng nhất, chiều dài $2b$, tâm G, khối lượng M di động không ma sát quanh trục (Oy).

Ta kí hiệu $J = \frac{4}{3}Mb^2$ là momen quán tính của S_1 đối với trục (Oy).

Người làm xiếc cầm gậy thăng bằng $\mathscr{S}_2$ tại một điểm P ($OP = c$ với $c < 2b$). Ta xem $\mathscr{S}_2$ là một thanh AB đồng nhất, tâm P, khối lượng m, chiều dài $2d$ và momen quán tính $I = \frac{1}{3}md^2$ so với trục (Py) đi qua P và đồng tuyến với (Oy).

$\mathscr{S}_2$ là linh động không ma sát quanh trục (Py) và người ta thừa nhận là các tác động tiếp xúc của $\mathscr{S}_1$ lên $\mathscr{S}_2$ được quy về một lực $\vec{R}$ tác dụng lên P. Ngoài ra $\mathscr{S}_1$ có thể thực hiện lên $\mathscr{S}_2$ một ngẫu lực phụ thuộc thời gian, có momen:

$$\vec{N} = N(t)\vec{e}_y$$

Các vị trí $\mathscr{S}_1$ và $\mathscr{S}_2$ được xác định bởi:

$$\alpha = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OF}), \quad \beta = (\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PA}),$$

trục (PX) vuông góc với OP.

1) Hệ ở vị trí ban đầu sao cho $\alpha = \alpha_0$ (góc nhỏ) và $\beta = 0$, giải thích ngắn gọn một cách định tính, theo anh thì làm thế nào người làm xiếc "lập lại cân bằng".

2) Hệ đang có một chuyển động nào đấy, tính theo hàm của $\dot{\alpha}$ và $\dot{\beta}$ các momen động lượng trong $\mathscr{R}$ của $\mathscr{S}_1$ đối với O, của $\mathscr{S}_2$ đối với P, của $\mathscr{S}_2$ đối với O, của toàn hệ ($\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2$) đối với O.

3) Người ta giả thiết là trong một khoảng thời gian t_0 nào đó, $\mathscr{S}_1$ thực hiện lên $\mathscr{S}_2$ ngẫu lực $\vec{N}$ để làm biến đổi giá trị của β.

a) Hãy biểu diễn biến thiên của momen động lượng của $\mathscr{S}$ trong khoảng thời gian t_0 dưới dạng một tích phân định hạn chứa một hàm của $\alpha(t)$; không cần phải tính tích phân này.

b) Chứng minh rằng nếu t_0 là rất nhỏ, momen động lượng của $\mathscr{S}$ có thể xem như không đổi, trong quá trình thao tác. Chứng tỏ rằng lúc đó $N(t)$ phải chọn là rất lớn nếu ta muốn β cũng có thể biến đổi.

c) Ta giả thiết là khi $t = 0$, ta có $\alpha = \alpha_0, \beta = 0$ và $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$.

Viết hệ thức giữa các biến thiên $\Delta\alpha$ và $\Delta\beta$ của α và β trong khoảng thời gian t_0 rất nhỏ. Các giá trị $\Delta\beta_1$ và $\Delta\beta$ nào cho phép người làm xiếc quay trở lại vị trí cân bằng $\alpha = 0$?

d) Ta so sánh việc dùng các thanh có chiều dài khác nhau nhưng có khối lượng như nhau.

Thanh như thế nào cho phép quay lại vị trí cân bằng một cách dễ nhất?

e) Cho biết $c = 1{,}5b$; $\alpha_0 = 2^{\circ}$ và $m = 5$ kg.

Vì những lí do thực tiễn rõ rệt, người làm xiếc chỉ có thể thực hiện những giá trị $\Delta\beta$ dưới một giới hạn $\Delta\beta_0$ nào đó. Ta lấy $\Delta\beta_0 = 20^{\circ}$. Chiều dài cực tiểu $2d_m$ của thanh là bao nhiêu mà dưới chiều dài đó, không thể quay về vị trí cân bằng?

4) Bây giờ ta nghiên cứu một tình huống mà sự thiết lập lại cân bằng xảy ra trong một thời gian khác không. Đối với việc đó, người ta thừa nhận là người làm xiếc phải thực hiện lên gậy thăng bằng một ngẫu lực tỉ lệ với khoảng cách của chính nó so với đường thẳng đứng. Người ta đặt:

$$N(t) = \lambda(M + m)gh\,\alpha(t)$$

Ở đây h là khoảng cách đến O của khối tâm của $\mathscr{S}$ và λ là một hằng số không thứ nguyên.

Đầu tiên cứ giả thiết rằng α vẫn còn là nhỏ; tiếp đó tìm một hàm $\alpha(t)$ có giới hạn sao cho đó là nghiệm của các phương trình vi phân, bây giờ hãy chính xác

hóa giả thiết "là nhỏ"; nếu trong một số điều kiện nhất định, $\alpha(t)$ là không giới hạn, thì đó là không thể có được sự ổn định.

a) Viết cho $\mathcal{S}_1$ định lí về momen động lực đối với O.

b) Viết cho $\mathcal{S}_2$ định lí về momen động lực đối với O.

c) Viết cho $\mathcal{S}_2$ định lí tổng hợp động lực và từ đó suy ra biểu thức của $\vec{R}$ phụ thuộc vào α và các đạo hàm của nó.

5) a) Lập hệ các phương trình vi phân mà α và β phải nghiệm đúng.

b) Những điều kiện nào mà λ phải nghiệm đúng để sự cân bằng là có thể có được?

Đối với $t = 0$, ta có $\alpha = \alpha_0$, $\beta = 0$ và $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$. Trong điều kiện ổn định, xác định các hàm $\alpha(t)$ và $\beta(t)$.

Chứng tỏ rằng chúng là các hàm sin và tính vận tốc góc, biên độ và pha tương đối của chúng.

c) Tính chu kì chung của $\alpha(t)$ và $\beta(t)$ khi $\lambda = 2$.

6) a) Vì những lí do thực tế, biên độ β_0 của hàm $\beta(t)$ là bị giới hạn. Người ta đặt $\beta_0 \le p\alpha_0$, ở đây p là một hằng số. Viết bất đẳng thức mà I và λ phải thỏa mãn để cho trong những điều kiện đó có thể ổn định. p phải nghiệm đúng những điều kiện cần thiết nào?

b) Biểu diễn bằng đồ thị những điều kiện mà I và λ phải đồng thời thỏa mãn để có thể thực hiện được ổn định.

c) Xác định chiều dài cực tiểu $2d'_m$ của thanh cho phép ổn định với $p = 10$ và $\lambda = 2$.

BÀI GIẢI

1) Để thiết lập cân bằng, người làm xiếc phải thực hiện một ngẫu lực $\vec{N}(t)$ lên gậy thăng bằng, lúc đó gậy sẽ thực hiện lên người làm xiếc một ngẫu lực $-\vec{N}(t)$ có xu hướng làm cho người làm xiếc đứng thẳng.

2) Ta lần lượt có:

• đối với $\mathcal{S}_1$: $\vec{L}_0(\mathcal{S}_1) = J\dot{\alpha}\vec{e}_y$;

• đối với $\mathcal{S}_2$: $\vec{L}_P(\mathcal{S}_2) = I(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{e}_y$;

$$\vec{L}_0(\mathcal{S}_2) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}(P) + \vec{L}_P(\mathcal{S}_2) = ((mc^2 + I)\dot{\alpha} + I\dot{\beta})\vec{e}_y ;$$

• đối với toàn hệ $\mathcal{S}$: $\vec{L}_O(\mathcal{S}) = \vec{L}_O(\mathcal{S}_1) + \vec{L}_O(\mathcal{S}_2) = ((mc^2 + I + J)\dot{\alpha} + I\dot{\beta})\vec{e}_y$.

3) a) Vận dụng định lí momen động lượng cho toàn hệ $\mathcal{S}$ đối với O, chiếu lên (Oy) (nhớ rằng $N(t)$ là một momen nội của hệ):

$$\frac{\mathrm{d}L_O(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = (Mgb\sin\alpha + mgc\sin\alpha)$$

Lấy tích phân trong thời gian t_0, ta được:

$$\Delta L_O(\mathcal{S}) = (Mb + mc)g\int_0^{t_0} \sin\alpha\,\mathrm{d}t$$

b) Nếu t_0 là rất nhỏ, vế thứ hai của phương trình trên là bỏ qua được và $L_O(\mathcal{S})$ có thể xem như không đổi trong thời gian t_0.

Cũng theo cách đó, vận dụng định lí về momen động lượng cho $\mathcal{S}_2$ đối với P, trong hệ quy chiếu trọng tâm, ta có:

$$I(\Delta\dot{\alpha} + \Delta\dot{\beta}) = \int_0^{t_0} N(t)\mathrm{d}t$$

$L_O(\mathcal{S})$ là không đổi, ta được:

$$(mc^2 + I + J)\Delta\dot{\alpha} + I\Delta\dot{\beta} = 0$$

từ đó $(\Delta\dot{\alpha} + \Delta\dot{\beta})$ không thể bằng không và như vậy vế thứ hai của phương trình trên không phải là bỏ qua được, ngay khi t_0 là rất nhỏ; điều này dẫn tới $N(t)$ là rất lớn.

c) Tính đến các điều kiện đầu, ta có thể viết giữa hai thời điểm 0 và t_0 :

$$(mc^2 + I + J)\dot{\alpha} + I\dot{\beta} = 0,$$

từ đó lấy tích phân giữa 0 và t_0 : $I\Delta\beta_1 = (mc^2 + I + J)\alpha_0$.

d) Vì $I = \dfrac{md^2}{3}$, một thanh dài hơn cho phép người làm xiếc quay lại vị trí cân bằng dễ hơn ($\Delta\beta_1$ lúc đó nhỏ hơn).

e) *Áp dụng số:* đối với $\Delta\beta_1 = \Delta\beta_0$, ta có $2d_m = 3{,}7$ m.

4) Lần lượt ta có được (α nhỏ, ta giả thiết $\sin\alpha \approx \alpha$ và $\cos\alpha \approx 1$):

a) chiếu lên (Oy):

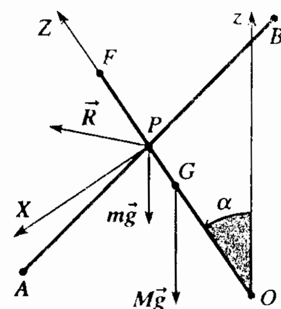
$$J\ddot{\alpha} = -N(t) - (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{R}).\vec{e}_y + Mgb\alpha ;$$

b) chiếu lên (Oy):

$$I(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) = N(t) = \lambda(M + m)gh\alpha ;$$

c) chiếu lên các trục (Ox), (Oy) và (Oz):

$$\begin{cases} mc\ddot{\alpha} = mg\alpha + R_x, \text{ từ đó } R_x = mc\ddot{\alpha} - mg\alpha \\ 0 = R_y \\ -mc\dot{\alpha}^2 = -mg + R_z, \text{ từ đó } R_z \approx mg. \end{cases}$$



5) a) Tổ hợp các phương trình có được ở 4) a) và ở 4) c), ta suy ra:

$$(J + mc^2)\ddot{\alpha} = -\lambda(M + m)gh\alpha + mgc\alpha + Mgb\alpha$$

và dùng định nghĩa về khối tâm của $\mathscr{S}$, $(M+m)h = Mb + mc$:

$$(J + mc^2)\ddot{\alpha} = -(\lambda - 1)(M+m)gh\alpha$$

Với phương trình có được ở **4) b)** vậy là ta được một hệ hai phương trình vi phân của α và β.

b) Sự ổn định rõ ràng là có thể được chỉ khi $\lambda > 1$; α và β lúc đó là những hàm sin có tốc độ góc ω xác định bởi:

$$\omega^2 = \frac{(\lambda - 1)(M+m)gh}{J + mc^2} \text{ và chu kì } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Với các điều kiện đầu đặt ra ở đề bài, α và β được viết thành:

$$\alpha = \alpha_0 \cos\omega t \text{ và } \beta = \alpha_0 \left(1 + \frac{J + mc^2}{I}\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right)(1 + cos\omega t)$$

c) *Áp dụng số:* $T = 2$ s.

6) a) Điều kiện $\beta_0 \le p\alpha_0$ dẫn đến:

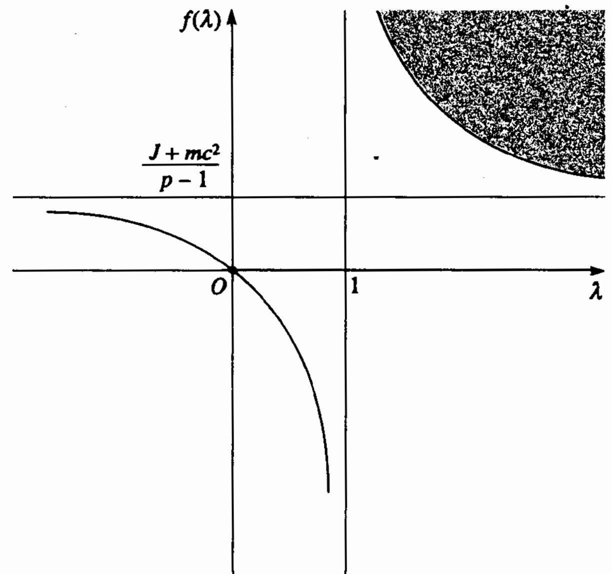
$$1 + \frac{J + mc^2}{I}\frac{\lambda}{\lambda - 1} \le p,$$

từ đó $I \ge \dfrac{J + mc^2}{p - 1}\dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$

Điều kiện $\lambda > 1$ dẫn đến $p > 1$.

b) Ta biểu diễn ở hình sau đây đồ thị của hàm:

$$f(\lambda) = \frac{J + mc^2}{p - 1}\frac{\lambda}{\lambda - 1}$$



Biết rằng $\lambda > 1$, các giá trị cho phép của I và λ bảo đảm cho người làm xiếc nằm ở vùng tô đậm của hình vẽ.

c) *Áp dụng số:* $2d'_m = 5{,}23$ m .

Bài toán 9

★★ Dao động của cái ròng rọc

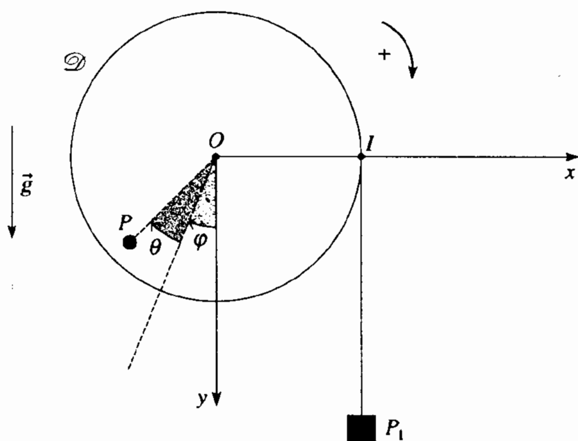
Theo thi tuyển vào ESEM – ORLEANS

Trong một hệ quy chiếu Galilé (O; x, y, z), người ta xét đến một máy giả ATWOOD bao gồm:

• một cái ròng rọc $\mathscr{D}$ mà ta xem như một đĩa đồng nhất bán kính R, khối lượng M và momen quán tính $J = \frac{1}{2}MR^2$ đối với trục của nó;

• một khối m_1 móc ở đầu mút P_1 của một dây mềm, không dãn, vòng qua và dính vào một cái ròng rọc;

• một gia trọng m và người ta giả thiết là như một điểm, hàn vào một điểm P cách trục ròng rọc một khoảng cách r.



Ròng rọc chỉ quay quanh trục (Oz) nằm ngang. Người ta giả thiết rằng tất cả chuyển động quay được thực hiện không có ma sát và sợi dây có khối lượng không đáng kể. Người ta kí hiệu $\mathscr{S}$ là hệ hoàn chỉnh như vậy, gồm có các khối lượng m và m_1 và ròng rọc $\mathscr{D}$.

1) Người ta tìm cách thực hiện cân bằng cho $\mathscr{S}$ bằng cách chọn khối lượng treo thích hợp m_1. Người ta xác định vị trí cân bằng này bằng góc $\varphi = (\vec{e}_y, \overrightarrow{OP})$.

Chứng tỏ rằng luôn luôn có một vị trí cân bằng bền nếu tăng m_1 từ giá trị không đến một giá trị mà ta sẽ phải xác định.

2) Xuất phát từ một trong những vị trí cân bằng có được bằng cách chọn m_1 thích hợp người ta quay ròng rọc $\mathscr{D}$ một góc θ sao cho có được $\theta + \varphi = (\vec{e}_y, \overrightarrow{OP})$.

a) Áp dụng định lí momen động lượng cho $\mathscr{S}$ đối với O. Suy ra phương trình vi phân của $\theta(t)$ chi phối chuyển động của $\mathscr{S}$.

b) Chỉ chú ý đến những chuyển động quay với biên độ rất nhỏ quanh vị trí cân bằng sao cho luôn luôn có $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Viết biểu thức của $\theta(t)$ với các điều kiện đầu $\theta(0) = \theta_0$ và $\dot{\theta}(0) = 0$.

Biểu diễn tốc độ góc ω và chu kì T của những dao động nhỏ theo hàm của g, J, m_1, r, φ và R.

c) Tính T với R = 0,5 m, r = 0,25 m, M = 1 kg, $4m_1 = m = 0{,}05$kg và $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

3) Ở một thời điểm t, trạng thái năng lượng của hệ được xác định bởi một hàm của các biến θ và $\dot{\theta}$.

a) Viết thế năng trọng trường $\mathscr{E}_P(\theta)$ của $\mathscr{S}$. Lấy thế năng của hệ khi cân bằng bền làm gốc thế năng.

b) Viết thành hàm của $\theta(t)$ và $\dot{\theta}(t)$ biểu thức của cơ năng $\mathscr{E}_M$ của hệ $\mathscr{S}$ biết rằng các điều kiện đầu như là ở câu hỏi **2) b)**.

c) Vẽ đường cong biểu diễn $\mathscr{E}_P(\theta)$ với θ biến thiên trong khoảng $[-2\theta; 2\theta]$.

Hệ $\mathscr{S}$ được thả ra không có tốc độ đầu ($\dot{\theta}(0) = 0$) từ vị trí ban đầu $\theta(0) = \theta_0$ bao gồm giữa -2π và $+2\pi$. Hãy chính xác hóa trong khoảng này các tập con của các giá trị θ_0 làm cho $\mathscr{S}$ dao động.

4) a) Chứng tỏ rằng, đối với các phép quay của $\mathscr{D}$ với biểu độ nhỏ quanh vị trí cân bằng bền lấy làm gốc của θ, thế năng có thể viết là:

$$\mathscr{E}_P(\theta) = \mathscr{E}_{P_0}(\theta) + \varepsilon G(\theta),$$

với $\mathscr{E}_{P_0}(\theta) = A\frac{\theta^2}{2} + B\frac{\theta^3}{3}$ và $\varepsilon G(\theta)$ kí hiệu một lượng vô cùng nhỏ bậc cao hơn θ^3.

Nhờ những số liệu cho biết ở **2) c)**, tính A và B.

Giả thiết ta nghiên cứu chuyển động của $\mathscr{S}$ gần vị trí cân bằng bền, trong những điều kiện sao cho những hệ thức có độ lớn vào cỡ giữa $\mathscr{E}_{P_0}(\theta)$ và những số hạng khác của $\mathscr{E}_P(\theta)$ cho phép chỉ giữ lại $\mathscr{E}_{P_0}(\theta)$, điều này dẫn đến $\theta_0 \ll 1$.

b) Viết phương trình chuyển động $\theta(t)$ của $\mathscr{S}$.

c) Người ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$\theta = \theta_0(\cos\omega t + \alpha f(t)) \quad (1)$$

ở đây ω là tốc độ góc xác định ở **2) b)** và α là một hằng số sao cho $\alpha \ll 1$; $f(t)$ là một hàm chưa biết của thời gian.

Sau khi thay (1) trong phương trình chuyển động, chứng tỏ rằng có một nghiệm của $f(t)$ gần đúng có dạng:

$$f(t) = \cos 2\omega t + k$$

Viết tường minh các hằng số α và k theo hàm của φ và θ_0.

d) Tính giá trị trung bình theo thời gian của θ, kí hiệu là $<\theta>$. Giải thích kết quả này.

BÀI GIẢI

1) Khi cân bằng, thành phần $\mathcal{M}_{z,\,ext}$ trên trục (Oz) của momen các lực ngoại tác dụng lên hệ $\mathcal{S}$ là bằng không:

$$\mathcal{M}_{z,\,ext} = (\overrightarrow{CP} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{CI} \wedge m_1\vec{g}).\vec{e}_z = 0,$$

vậy $-mgr\sin\varphi + m_1gR = 0$.

Ta nhận xét rằng phương trình trên cho ta $\sin\varphi \geq 0$ và vị trí cân bằng chỉ tồn tại nếu $\sin\varphi \leq 1$, điều này dẫn đến:

$$m_1 \leq \frac{r}{R}m$$

Nếu ta làm quay ròng rọc một góc θ nhỏ dương, từ vị trí cân bằng φ, ta nhận thấy rằng momen:

$$\mathcal{M}_{z,\,ext}(\theta+\varphi) = -mgr\sin(\varphi+\theta) + m_1gR \approx -\theta mgr\cos\varphi$$

- là âm nếu $\varphi < \frac{\pi}{2}$: cân bằng là *bền*;
- là dương nếu $\varphi > \frac{\pi}{2}$: cân bằng *không bền*.

Từ nay về sau ta kí hiệu φ là vị trí cân bằng bền.

2) a) Thành phần trên (Oz) của momen động lượng của hệ $\mathcal{S}$ là (nhớ rằng φ là một hằng số):

$$L_z = J\dot{\theta} + (\overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}(P) + \overrightarrow{OP}_1 \wedge m_1\vec{v}(P_1).\vec{e}_z)$$

vậy $L_z = (J + mr^2 + m_1R^2)\dot{\theta}$.

Định lí momen động lượng cho ta:

$$(J + mr^2 + m_1R^2)\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{z,\,ext} = -mgr\sin(\varphi+\theta) + m_1gR$$

b) Ta đã thấy là $\varphi < \frac{\pi}{2}$ tương ứng vị trí cân bằng bền; nếu θ là nhỏ, phương trình trên trở thành:

$$(J + mr^2 + m_1R^2)\ddot{\theta} = -\theta mgr\cos\varphi$$

nó đưa đến chuyển động hình sin:

$$\theta = \theta_0\cos\omega t \text{ (tính đến các điều kiện ban đầu)}$$

với tốc độ góc $\omega = \frac{mgr\cos\varphi}{J + mr^2 + m_1R^2}$ và chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

c) *Áp dụng số:* $\varphi = 30^\circ$ và $T = 6{,}99$ s.

3) a) Thế năng của hệ là:

$$\mathcal{E}_P = -m\vec{g}.\overrightarrow{OP} - m_1\vec{g}.\overrightarrow{OP}_1 + \text{cte}$$

vậy $\mathcal{E}_p = -mgr\cos(\theta+\varphi) - m_1g\,y_{P_1} + \text{cte}$.

Khi cân bằng:

$$0 = -mgr\cos\varphi - m_1g\,y_{OP_1}$$

Vì $y_{P_1} = y_{OP_1} = R\theta$, ta suy ra:

$$\mathcal{E}_P = mgr(\cos\varphi - \cos(\theta+\varphi)) - m_1gR\theta$$

b) Động năng của hệ là:

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2(P) + \frac{1}{2}m_1v^2(P_1),$$

vậy $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}(J + mr^2 + m_1R^2)\dot{\theta}^2$

Vì không có ma sát, cơ năng của hệ được bảo toàn trong quá trình chuyển động, từ đó:

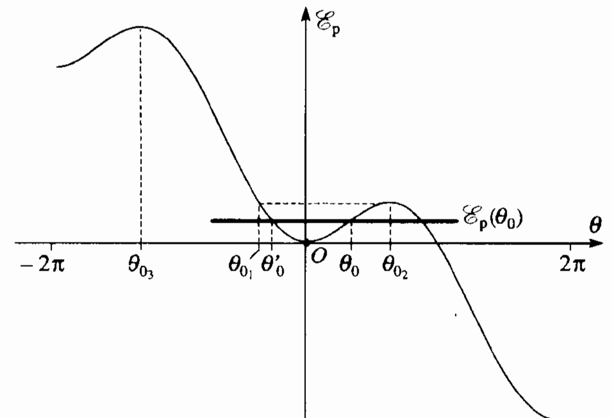
$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P(\theta) = \text{cte} = \mathcal{E}_P(\theta_0)$$

vậy

$$\frac{1}{2}(J + mr^2 + m_1R^2)\dot{\theta}^2 + mgr(\cos\varphi - \cos(\theta+\varphi)) - m_1gR\theta$$
$$= mgr(\cos\varphi - \cos(\theta_0+\varphi)) - m_1gR\theta_0$$

c) Dáng điệu của hàm $\mathcal{E}_P(\theta)$ được biểu diễn ở sơ đồ dưới đây:

Ta có thể để ý rằng $\theta = 0$ tương ứng với cực tiểu của $\mathcal{E}_P(\theta)$ và như vậy là ở vị trí cân bằng bền của hệ.



Các giá trị θ_{0_2} và θ_{0_3} tương ứng với các cực đại của $\mathcal{E}_P(\theta)$ và như vậy là tương ứng với các vị trí cân bằng không bền của hệ.

Nếu θ_0 là gồm giữa các giá trị θ_{0_1} và θ_{0_2}, hệ dao động giữa θ_0 và θ_0' (trong "chậu" thế năng), vì $\mathscr{E}_P(\theta) \le \mathscr{E}_P(\theta_0) = \mathscr{E}_P(\theta'_0)$ cho phép $\mathscr{E}_K > 0$.

Áp dụng số: θ_{0_2} có được khi tính $\dfrac{d\mathscr{E}_P}{d\theta} = 0$, điều này dẫn đến $\sin(\theta_{0_2} + \varphi) = \sin\varphi$. Biết rằng $\varphi = 30^o$, ta có $\theta_{0_2} = 120^o$.

Tính toán bằng số cho ta $\theta_{0_1} = -1{,}2$ rad, vậy vào cỡ -69^o.

4) a) Khai triển

$$\mathscr{E}_P(\theta) = mgr(\cos\varphi - \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi - \theta\sin\varphi)$$

giới hạn đến bậc ba, ta được:

$$\mathscr{E}_P(\theta) = mgr\left(\frac{\theta^2}{2}\cos\varphi - \frac{\theta^3}{6}\sin\varphi\right) + \varepsilon G(\theta)$$

Ta tìm được:

$$A = mgr\cos\varphi = 0{,}106 \text{ và } B = -\frac{1}{2}mgr\sin\varphi = -0{,}031.$$

b) Lấy đạo hàm hệ thức $\mathscr{E}_K + \mathscr{E}_{P_0}(\theta) = \mathscr{E}_{p_0}(\theta_0)$, ta có:

$$(J + mr^2 + m_1R^2)\ddot{\theta} = -A\theta - B\theta^2$$

c) Thay thế θ bằng $\theta = \theta_0\cos\omega t + \theta_0\alpha f(t)$; sau khi ước lược (nhớ rằng $(J + mr^2 + m_1R^2)\omega^2 = A$ và $\alpha \ll 1$, $\theta_0 \ll 1$):

$$(J + mr^2 + m_1R^2)\alpha\ddot{f} = -A\alpha f - B\theta_0\cos^2\omega t.$$

Thay f bằng $f = \cos 2\omega t + k$ ta có:

$$\left(3A\alpha - \frac{1}{2}B\theta_0\right)\cos 2\omega t = A\alpha k + \frac{1}{2}B\theta_0,$$

từ đó ta có: $\alpha = \dfrac{B\theta_0}{6A} = -\dfrac{1}{12}\theta_0\text{tg}\varphi$ và $k = -\dfrac{B\theta_0}{2\alpha A} = -3$.

d) Hàm $\theta = \theta_0\cos\omega t + \alpha\theta_0\cos 2\omega t + \alpha\theta_0 k$ là tuần hoàn với chu kì T; giá trị trung bình của nó rõ ràng là bằng:

$$<\theta> = \alpha\theta_0 k = \frac{1}{4}\theta_0^2\text{tg}\varphi$$

Giá trị trung bình θ là khác không vì các dao động của hệ không phải là đối xứng quanh giá trị cân bằng $\theta = 0$ (đường cong $\mathscr{E}_P$ là hàm của θ không phải là đối xứng với $\theta = 0$).

Bài toán 10

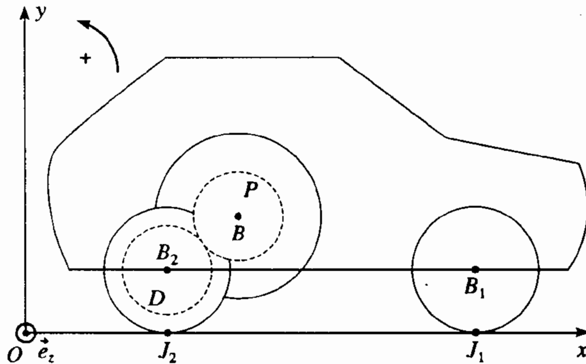
★★ Dịch chuyển của cái đồ chơi trên mặt đất

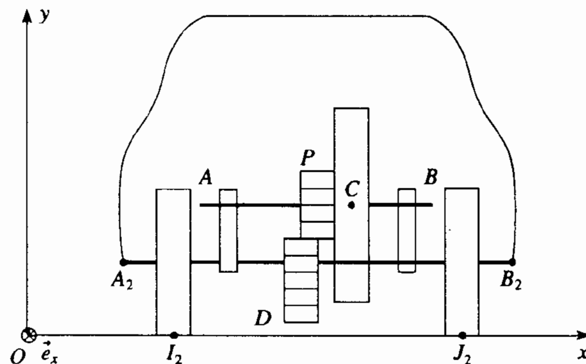
Theo thi tuyển Icare.

$\mathscr{R}(O\ ;x,\ y,\ z)$ là một hệ quy chiếu Galilê. Một cái đồ chơi có dạng xe ôtô nhỏ gồm "vỏ xe" khối lượng m, quán tâm G, gắn chặt với hai trục A_1B_1 và A_2B_2 có phương $\vec{e}_z$.

Trên mỗi trục của hai trục đó có gắn hai bánh xe bán kính r có thể quay không ma sát quanh trục tương ứng của nó.

Các bánh xe tiếp xúc với mặt đất tương ứng ở I_1 và J_1 đối với cầu trước và I_2 và J_2 đối với cầu sau. Ngoài ra trục sau A_2B_2 liên kết với một bánh xe răng D gồm có $2n$ răng được kéo bởi cái nhông P gồm có n răng, nhông này liên kết với trục (AB) của một cái đĩa đồng nhất khối lượng M, bánh kính R, quán tâm C và momen quán tính $J = \dfrac{1}{2}MR^2$ so với trục.





Người ta bỏ qua khối lượng bánh xe và các bánh xe răng. Mặt trung tuyến dọc theo xe là một mặt đối xứng và xe dịch chuyển theo trục nằm ngang (Ox), điều này cho phép viết các tác động tiếp xúc mặt đất lên bánh xe:

- ở I_1 và J_1: $\vec{R}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_y$;
- ở I_2 và J_2: $\vec{R}_2 = T_2\vec{e}_x + N_2\vec{e}_y$.

Ma sát duy nhất được xét đến là ma sát của trục (AB) lên các ổ trục, được quy về một ngẫu lực có momen $\vec{\Gamma} = -\Gamma\vec{e}_z$ không đổi, tác dụng lên đĩa và dĩ nhiên là có xét đến ma sát của các bánh xe với mặt đất.

Các đặc trưng hình học được đặc trưng bởi các vectơ:

$\overrightarrow{CI_1} = 3a\vec{e}_x - b\vec{e}_y - c\vec{e}_z$; $\overrightarrow{CJ_1} = 3a\vec{e}_x - b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$;

$\overrightarrow{CI_2} = -a\vec{e}_x - b\vec{e}_y - c\vec{e}_z$; $\overrightarrow{CJ_2} = -a\vec{e}_x - b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$;

(b được chọn sao cho $rb = R^2$) $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{2}a\vec{e}_x$.

Cho biết: $m = 10$g; $M = 30$g; $r = 10$mm; $R = 15$mm; $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$.

1) Pha 1

Đồ chơi, được cầm ở tay, được đặt lên mặt đất lúc $t = 0$ và đẩy với gia tốc đều làm cho đồ chơi chạy được $d = 50$ cm trong thời gian $t_1 = 2$s.

Ở thời điểm $t = t_1$, đồ chơi được nhấc lên rồi giữ đứng yên trên mặt đất. Biết rằng trong pha 1 các bánh xe lăn trên mặt đất không bị trượt, tính ở thời điểm t_1 này:

a) Số đo đại số ω_1 của vận tốc quay của đĩa theo hàm của r, d và t_1. Vận dụng tính số;

b) Momen động lượng $\vec{L}_C$ đối với C của đồ chơi phụ thuộc vào J và ω_1;

c) Động năng $\mathscr{E}_K$ của đồ chơi.

2) Pha 2

Đồ chơi được giữ đứng yên trên mặt đất. Đĩa đứng yên ở thời điểm t_2 sao cho $t_2 - t_1 = 6$s.

Tính Γ theo hàm của ω_1, J, t_1 và t_2 rồi áp dụng tính số.

3) Pha 3

Người ta lặp lại pha 1, cuối pha 1, nghĩa là ở thời điểm t_1, đồ chơi được buông ra và dịch chuyển tự do trên mặt đất.

a) Với giả thiết là bánh xe lăn không trượt, xác định phương trình vi phân thỏa mãn hoành độ x của quán tâm của xe. Từ đó suy ra rằng đồ chơi có một gia tốc không đổi $\ddot{x} = -\gamma$ $(\gamma > 0)$ mà ta cần viết ra theo hàm của R, r, M, m và Γ.

b) Tính theo hàm của γ vận tốc v_1 của đồ chơi ở thời điểm t_1, khoảng cách d' mà đồ chơi chạy được.

c) Tính các thành phần T_1, N_1, T_2 và N_2 theo hàm của m, M, γ và $\varepsilon = \dfrac{b}{a}$.

d) Giả sử f là hệ số ma sát trượt của các bánh xe trên mặt đất. Chứng tỏ rằng giả thiết lăn không trượt buộc γ phải thỏa mãn một điều kiện, hãy nêu rõ điều kiện đó.

BÀI GIẢI

1) a) Xe ôtô với gia tốc không đổi ở thời điểm t_1 có vận tốc:

$$v_1 = \frac{2d}{t_1}$$

Ở thời điểm này, các bánh xe có cùng vận tốc góc (đại số)

$$\Omega_1 = -\frac{v_1}{r} = -\frac{2d}{rt_1} \text{ (chú ý dấu !)}$$

và đĩa có vận tốc góc:

$$\omega_1 = -2\Omega_1 = +\frac{4d}{rt_1}, \text{ vậy } \omega_1 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$$

b) Momen động lượng của xe đối với C là:

$$\vec{L}_C = \underbrace{m\overrightarrow{CG} \wedge \vec{v}(G)}_{\text{xe không đĩa}} + \underbrace{J\vec{\omega}}_{\text{đĩa}} = J\omega\vec{e}_z$$

vì các bánh xe có khối lượng không đáng kể và các vectơ $\overrightarrow{CG}$ và $\vec{v}(G)$ là đồng tuyến.

Ở thời điểm t_1 ta có : $\vec{L}_C(t_1) = J\omega_1\vec{e}_z = 2MR^2\dfrac{d}{rt_1}\vec{e}_z$.

c) Động năng của xe là :

$$\mathscr{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}mv(G)^2}_{\text{xe không đĩa}} + \underbrace{\frac{1}{2}Mv(C)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2}_{\text{đĩa}}$$

với $v(G)^2 = v(C)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\omega r\right)^2 = v^2$, từ đó :

$$\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}\left[m + M + 2M\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]v^2,$$

và ở thời điểm t_1 : $\mathscr{E}_K(t_1) = 2\left[m + M + 2M\left(\dfrac{R}{r}\right)^2\right]\dfrac{d^2}{t_1^2}$.

2) Áp dụng định lí momen động lượng cho đĩa đối với C, chiếu lên trục (Oz): $J\dot{\omega} = -\Gamma$,

lấy tích phân giữa các thời điểm t_1 và t_2 , ta được: $J\omega_1 = \Gamma(t_2 - t_1)$.

Các bánh xe sau, khối lượng không đáng kể, không đặt trên mặt đất, qua trung gian của cái nhông không tác dụng một ngẫu lực nào lên bánh xe răng gắn với đĩa. Để thấy rõ điều đó, chỉ cần vận dụng định lí momen động lượng cho các bánh xe sau, tiếp đó vận dụng định luật tác động và phản tác động.

Áp dụng số: $\Gamma = 5{,}625.10^{-5}$ N.m

3) a) Vận dụng cho xe định lí về công suất động năng; chỉ ngẫu lực ma sát nội Γ làm việc:

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = -\Gamma\omega_{\text{đĩa}} + \Gamma\omega_{\text{xe}} = -\Gamma\omega = -\Gamma\frac{2v}{r} \text{ (vì } \omega_{\text{xe}} = 0 \text{ !)}$$

Động năng của xe đã được tính ở câu hỏi **1) c)**, ta có:

$$\gamma = \frac{2\Gamma}{r\left(m + M + M\dfrac{R^2}{r^2}\right)}.$$

b) Xe có một gia tốc không đổi, sau thời gian t_1 xe đi được một khoảng cách: $d' = \dfrac{v_1^2}{2\gamma}$

Vậy với $v_1 = 0{,}5$ m.s^{-1} và $\gamma = 0{,}105$ m.s^{-2} , $d' = 1{,}19$ m.

c) Vận dụng cho xe trong $\mathscr{R}$:

- định lí tổng hợp động lực, chiếu lên (Ox) và (Oy):

$$\begin{cases} -(m + M)\gamma = 2T_1 + 2T_2 \\ 0 = 2N_1 + 2N_2 - (m + M)g \end{cases}$$

- định lí momen động lượng ở C:

$$\vec{D}_C = \frac{d\vec{L}_C}{dt} + (M + m)\vec{v}(G_0) \wedge \vec{v}(C) = \vec{\mathscr{M}}_{C,f_{ext}} .$$

Vận tốc của quán tâm G_0 của đồ chơi là đồng tuyến với vận tốc của điểm C, ta có:

$$J\dot{\omega}\vec{e}_z = \vec{\mathscr{M}}_{C,f_{ext}} = (\overrightarrow{CI}_1 + \overrightarrow{CJ}_1) \wedge (\vec{T}_1 + \vec{N}_1) + (\overrightarrow{CI}_2 + \overrightarrow{CJ}_2) \wedge (\vec{T}_2 + \vec{N}_2) + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g}$$

vậy $J\dot{\omega} = 6aN_1 + 2bT_1 - 2aN_2 + 2bT_2 - \dfrac{a}{2}mg$

Cuối cùng, áp dụng cho mỗi bánh xe trước (khối lượng không đáng kể) định lí momen động lượng đối với trục rõ ràng là ta được: $T_1 = 0$ (chú ý: áp dụng cùng một định lí cho bánh xe sau không có được $T_2 = 0$ vì cái nhông gắn với đĩa tác dụng lên bánh xe này một momen khác không).

Biết rằng $\dot{\omega} = -2\dfrac{\gamma}{r}$, các phương trình trên cho phép tính các thành phần:

$$T_2 = -\frac{1}{2}(m+M)\gamma\ ;$$

$$N_1 = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{3}{2}m+M\right)g+\varepsilon m\gamma\right) \text{ và } N_2 = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{5}{2}m+3M\right)g-\varepsilon m\gamma\right)$$

d) Xe thực tế lăn không trượt trên mặt đất nếu:

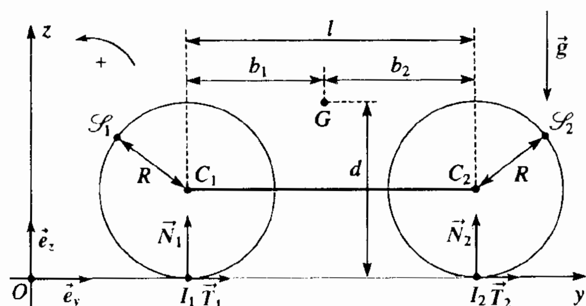
- $N_1 \geq 0$ điều này luôn luôn được nghiệm đúng.
- $N_2 \geq 0$ tức là giả thiết $\gamma \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{5}{2}+3\frac{M}{m}\right)g$;
- $|T_2| \leq f\,N_2$ điều này dẫn đến $\gamma \leq f\dfrac{\left(\frac{5}{2}m+3M\right)g}{4(M+m)+f\varepsilon m}$.

Điều kiện thứ hai rõ ràng là khắt khe hơn là điều kiện thứ nhất.

Bài toán 11

★★ Chuyển động của cái xe máy

Ta hãy nghiên cứu sự khởi động và sự hãm phanh của một cái xe máy, sơ đồ gồm ba phần: hai bánh xe giống nhau kí hiệu là $\mathcal{S}_1$ (bánh sau) và $\mathcal{S}_2$ (bánh trước) và một hệ, kí hiệu là $\mathcal{S}_3$ là khung, các trang bị máy móc và người đi xe máy. Hệ $\mathcal{S}_3$ được giả thiết là không biến dạng và toàn bộ hệ $\mathcal{S}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$ là hai chiều dịch chuyển theo trục nằm ngang (Oy) của một mặt phẳng thẳng đứng (Oyz) thuộc về hệ trực giao ($O; x, y, z$) (giả thiết là Galilê). Kí hiệu C_1 và C_2 là tâm của bánh xe (chúng cũng đồng thời là quán tâm) và G là quán tâm của toàn hệ $\mathcal{S}$. Các đặc trưng về kích thước cần thiết để giải bài toán có ghi rõ trên sơ đồ (trên sơ đồ không vẽ phần $\mathcal{S}_3$).



Gọi m là khối lượng của một trong hai bánh xe, R là bán kính bánh xe, $J = \frac{3}{4}mR^2$ là momen quán tính bánh xe đối với trục và M là khối lượng của phần $\mathcal{S}_3$. Ngoài ra xe máy tiếp xúc với trục (Oy) ở các điểm I_1 và I_2 ở đấy có các phản lực kí hiệu tương ứng là:

$$\vec{R}_1 = T_1\vec{e}_y + N_1\vec{e}_z \text{ và } \vec{R}_2 = T_2\vec{e}_y + N_2\vec{e}_z$$

Ta gọi f là hệ số ma sát trượt của $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$ lên trục (Oy). Phần $\mathcal{S}_3$ truyền cho mỗi bánh xe một lực và một ngẫu lực (của động cơ hoặc là phanh). Ta kí hiệu K_1 và K_2 là các giá trị đại số của các momen của các ngẫu lực truyền cho bánh xe $\mathcal{S}_1$ và $\mathcal{S}_2$, tính theo một cách đại số theo chiều thuận của hệ quy chiếu (Oyz). Ta giả thiết rằng các bánh xe lăn không trượt trên trục (Oy).

1) a) Cho v ($v > 0$) là vận tốc tịnh tiến song song (Oy) của xe máy. Tính động năng và momen động lượng của xe đối với trục song song với (Ox) đi qua G.

b) Vận dụng các định lí tổng quát của cơ học cho các bánh xe và cho toàn bộ hệ $\mathcal{S}$, hãy viết ra các biểu thức của:

α) Gia tốc của $\mathcal{S}$, kí hiệu $a = \dfrac{dv}{dt}$.

β) Các thành phần thẳng đứng N_1 và N_2 các phản lực của mặt đất ở I_1 và I_2;

γ) Các thành phần nằm ngang T_1 và T_2 của các phản lực này cũng ở các điểm ấy, theo hàm của $R, M, m, d, g, b_1, b_2, l, K_1$ và K_2.

Trong tất cả các phần tiếp theo, ta xem m không đáng kể so với M.

2) Nghiên cứu xe máy khởi động. Ta giả thiết là chỉ có bánh xe sau là được truyền chuyển động

$$K_1 < 0 \text{ và } K_2 = 0$$

a) Điều kiện nào gia tốc a phải thỏa mãn để xe máy có thể chuyển động trong những điều kiện nói trên, biết rằng bánh xe không bị nâng lên và lăn không trượt?

b) Tính gia tốc giới hạn.

Cho biết : $l = 1{,}50$ m; $b_1 = 0{,}6$ m; $d = 0{,}90$ m; $f = 0{,}2$; $g = 10$ m.s^{-2}.

3) Nghiên cứu khi phanh xe máy

Giả thiết như trước là xe máy lăn không trượt với vận tốc $v(t)$ ($v > 0$) trên trục nằm ngang (Oy). Người ta tác dụng lên bánh xe các momen phanh hãm không đổi K_1 và K_2 ($K_1 > 0$, $K_2 > 0$) tạo ra gia tốc $a = \dfrac{dv}{dt}$ âm.

a) Thiết lập các bất đẳng thức mà K_1 và K_2 phải thoả mãn để bánh xe không bị nâng lên và chuyển động các bánh xe vẫn giữ là lăn không trượt.

b) Giả thiết là $b_2 > fd$.

Tính các giá trị cực đại của $|a|$ thích hợp với các điều kiện chuyển động xác định như trên và những momen hãm tương ứng.

Nên dựa vào cách giải thích theo giản đồ các bất đẳng thức của **2) a)**.

c) Tính $|a|_{max}$, K_1 và K_2 đối với $g = 10$ m.s^{-2}; $f = 0{,}2$; $M = 100$kg; $R = 0{,}5$m; $l = 1{,}5$m; $b_1 = 0{,}6$ m; $d = 0{,}9$ m.

BÀI GIẢI

1) a) Các bánh xe không trượt trên trục (Oy), vận tốc quay của chúng là:

$$\vec{\omega} = -\frac{v}{R}\vec{e}_x .$$

Vận dụng các định lí KŒNIG để xác định:

- động năng của xe máy trong $(O; x, y, z)$:

$$\mathscr{E}_K = \underbrace{\frac{1}{2}Mv^2}_{\mathscr{S}_3} + 2\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2}_{\mathscr{S}_1 \text{ và } \mathscr{S}_2}\right)$$

vậy $\mathscr{E}_K = \frac{1}{2}v^2\left(M + \frac{7}{2}m\right)$;

- momen động lượng đối với G của xe máy trong $(O; x, y, z)$:

$$\vec{L}_G = \underbrace{(\overrightarrow{GC}_3 \wedge M\vec{v} + \vec{L}^*_{\mathscr{S}_3})}_{\mathscr{S}_3} + \underbrace{(\overrightarrow{GC}_1 \wedge m\vec{v} + J\vec{\omega})}_{\mathscr{S}_1} + \underbrace{(\overrightarrow{GC}_2 \wedge m\vec{v} + J\vec{\omega})}_{\mathscr{S}_2}$$

ở đây kí hiệu C_3 là quán tâm của $\mathscr{S}_3$ và $\vec{L}^*_{\mathscr{S}_3}$ là momen động lượng trọng tâm của $\mathscr{S}_3$: $\vec{L}^*_{\mathscr{S}_3} = \vec{0}$.

Vậy $\vec{L}_G = (M\overrightarrow{GC}_3 + m\overrightarrow{GC}_1 + m\overrightarrow{GC}_2) \wedge \vec{v} + 2J\vec{\omega}$.

Nhưng theo định nghĩa của G, $M\overrightarrow{GC}_3 + m\overrightarrow{GC} + m\overrightarrow{GC}_2 = \vec{0}$.

Ta rút ra $\vec{L}_G = 2J\vec{\omega}$, chiếu lên trục (Ox):

$$L_{Gx} = 2J\omega = -\frac{3}{2}mRv .$$

2) α) Áp dụng cho toàn hệ định lí công suất động năng trong $(O; x, y, z)$ chú ý là các lực ngoại không làm việc:

$$\frac{d\mathscr{E}_K}{dt} = av\left(M + \frac{7}{2}m\right) = \mathscr{P}_{ext} + \mathscr{P}_{int} = \mathscr{P}_{int} = (K_1 + K_2)\omega .$$

Từ đó suy ra: $a = -\dfrac{K_1 + K_2}{R\left(M + \frac{7}{2}m\right)}$ (1).

β) Vận dụng cho toàn hệ trong $(O; x, y, z)$:

- định lí tổng hợp động học, chiếu lên các trục (Oy) và (Oz):

$$\begin{cases}(M + 2m)a = T_1 + T_2 & (2)\\ 0 = N_1 + N_2 - (M + 2m)g & (3)\end{cases};$$

- định lí momen động lượng ở G, chiếu lên trục (Ox):

$$\frac{dL_{Gx}}{dt} = [\overrightarrow{GP}_1 \wedge (\vec{N}_1 + \vec{T}_1) + \overrightarrow{GP}_2 \wedge (\vec{N}_2 + \vec{T}_2)].\vec{e}_x ,$$

vậy $-\frac{3}{2}mRa = -b_1N_1 + b_2N_2 + d(T_1 + T_2)$ (4)

Ta suy ra từ các phương trình (1) (2) (3) và (4):

$$N_1 = \frac{b_2(M + 2m)g}{l} - \frac{K_1 + K_2}{l}\,\frac{\frac{3}{2}m + \frac{d}{R}(M + 2m)}{M + \frac{7}{2}m}$$

$$N_2 = \frac{b_1(M + 2m)g}{l} - \frac{K_1 + K_2}{l}\,\frac{\frac{3}{2}m + \frac{d}{R}(M + 2m)}{M + \frac{7}{2}m}$$

γ) Vận dụng cho mỗi bánh xe định lí momen động lượng đối với các tâm tương ứng của chúng, trong các hệ quy chiếu trọng tâm tương ứng và chiếu lên trục (Ox):

$$\frac{-3}{4}mRa = K_1 + T_1 R \quad \text{và} \quad \frac{-3}{4}mRa = K_2 + T_2 R$$

thay a bằng giá trị của nó (hệ thức 1), ta có:

$$T_1 = \frac{-(4M + 11m)K_1 + 3mK_2}{4R\left(M + \frac{7}{2}m\right)} \quad \text{và} \quad T_2 = \frac{3mK_1 - (4M + 11m)K_2}{4R\left(M + \frac{7}{2}m\right)}$$

Trong trường hợp mà $m \ll M$, các biểu thức của N_1, N_2, T_1 và T_2 trở thành:

$$N_1 = \frac{b_2}{l}Mg - \frac{d}{R}\frac{K_1 + K_2}{l}; \qquad N_2 = \frac{b_1}{l}Mg - \frac{d}{R}\frac{K_1 + K_2}{l}$$

$$T_1 = -\frac{K_1}{R}; \qquad T_2 = -\frac{K_2}{R}$$

2) Bánh xe sau là truyền động: $K_1 < 0$; $K_2 = 0$.

a) Các bánh xe không tự nâng lên nếu:

- $N_1 \geq 0$ điều này luôn nghiệm đúng;
- $N_2 \geq 0$ điều này buộc $|K_1| \leq \frac{R}{d}b_1Mg = A$

Các bánh xe không trượt nếu:

- $|T_1| \leq fN_1$ điều này buộc $|K_1| \leq f\frac{Rb_2}{l - fd}Mg = B$;
- $|T_2| \leq fN_2$ điều này luôn luôn nghiệm đúng vì $T_2 = 0$.

Do đó gia tốc của xe máy không được vượt giá trị nhỏ hơn của các giá trị $\frac{A}{RM}$ hay $\frac{B}{RM}$

b) *Áp dụng số:* A = 3,33M và B=0,68M

Bánh xe $\mathscr{S}_1$ không trượt đặt ra điều kiện hạn chế hơn: $K_{1lim} = B$ điều này dẫn đến gia tốc giới hạn :

$$a_{lim} = \frac{B}{RM} = \frac{fb_2}{l - fd}g, \text{ vậy } a_{lim} = 1{,}36 \text{ m.s}^{-2} .$$

3) a) Các bánh xe không tự nâng lên nếu:

- $N_1 \geq 0$ điều này buộc $(K_1 + K_2) \leq \frac{R}{d}b_2Mg$ (a);
- $N_2 \geq 0$ điều này luôn luôn được nghiệm đúng.

Các bánh xe không trượt nếu:

- $|T_1| \leq fN_1$ điều này buộc $K_1\left(l + f\frac{d}{l}\right) + K_2f\frac{d}{l} \leq \frac{R}{l}b_2Mg$ (b)
- $|T_2| \leq fN_2$ điều này buộc $-K_1f\frac{d}{l} + K_2\left(1 - f\frac{d}{l}\right) \leq \frac{R}{l}b_1Mg$ (c)

b) Chúng ta biểu diễn trong sơ đồ dưới đây, trong mặt (K_1, K_2) các đường thẳng của phương trình:

• $K_1 + K_2 = \frac{R}{d} b_2 Mg = K_0$ (điều kiện giới hạn (a)).

Đường thẳng này đi qua các điểm (0, K_0) và (K_0 ,O);

• $K_1\left(1+f\frac{d}{l}\right)+K_2 f\frac{d}{l}=\frac{R}{l}fb_2 Mg$ (điều kiện giới hạn (b)).

Đường thẳng này đi qua các điểm: (0; K_0) và $\left(K'_0=\frac{K_0}{1+\frac{l}{fd}},0\right)$.

• $-K_1 f\frac{d}{l}+K_2\left(l-f\frac{d}{l}\right)=\frac{R}{l}f b_1 Mg$ (điều kiện giới hạn (c)).

Đường thẳng này đi qua các điểm:

$$\left(0, K_0'' = \frac{\frac{R}{d}b_1 Mg}{\frac{l}{fd}-1}\right) \text{ và } \left(K_0''' = -\frac{R}{d}b_1 Mg, 0\right)$$

Ta có thể nghiệm rằng $0 < K_0' < K_0$ và $K_0''' < 0$

Hơn nữa $b_2 > fd$ buộc $K_0'' > 0$ và $\frac{K_0}{K_0''}=\frac{b_2}{b_1}\left(\frac{l}{fd}-1\right)>1$

$$0 < K_0'' < K_0 .$$

Các giá trị cho phép của K_1 và K_2 tương ứng với vùng trắng (tam giác $MK_0'''K'_0$) trên sơ đồ. Thế mà | a | là cực đại nếu ($K_1 + K_2$) là cực đại, điều này tương ứng với điểm M ở sơ đồ:

Thực vậy, đặt $s = K_1 + K_2$ các điều kiện giới hạn (b) và (c) được viết ra là:

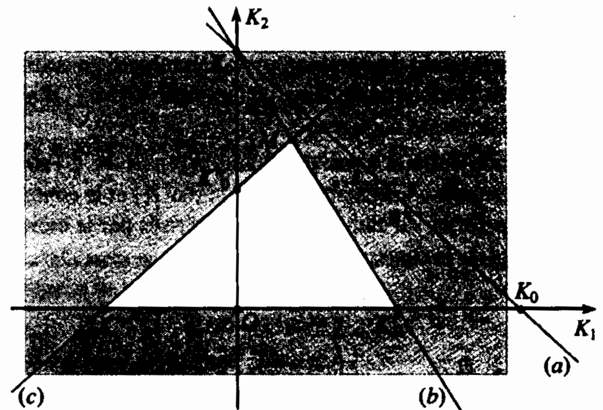
(b) $K_1 + sf\frac{d}{l}=\frac{R}{l}f b_2 Mg$: s là cực đại nếu K_1 là cực tiểu

(c) $-K_1 + s\left(1-f\frac{d}{l}\right)=\frac{R}{l}f b_1 Mg$: s là cực đại nếu K_1 là cực đại.

Như vậy s_{max} nghiệm đúng các điều kiện giới hạn (b) và (c) dẫn đến:

$$s_{max} = f RMg \text{ và } |a|_{max} = fg .$$

c) *Áp dụng bằng số:* $|a|_{max}=2 m.s^{-2}$; $K_1 = (b_2 - fd) f Mg$, vậy $K_1 = 48$ N.m ; $K_2 = s_{max} - K_1$, vậy $K_2 = 52$ N.m .



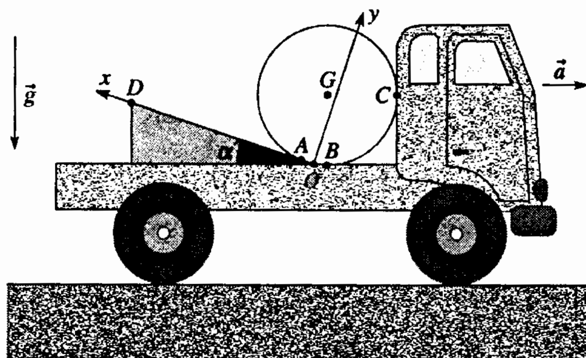
Bài toán 12

★★ Vận chuyển một cái ống

Một xe tải dịch chuyển trên con đường nằm ngang, thẳng gắn liền với một hệ quy chiếu galilé chở một ống hình trụ đồng nhất khối lượng m bán kính R; momen quán tính của ống này đối với trục ống là $J = mR^2$.

Với mục đích giữ cho ống đứng yên ở đầu mút của sàn xe tải nằm ngang, đối lại với phía cabin người ta dùng một cái chèn tiết diện hình tam giác chiều dài $OD = l$, góc α và khối lượng không đáng kể.

Các tiếp xúc giữa ống và xe tải (ở B và C) là không có ma sát, tiếp xúc ống - cái chèn (ở A) và tiếp xúc cái chèn - sàn xe được đặc trưng cùng hệ số ma sát f như nhau.



Cho biết: $\alpha = 10^o$; m = 50 kg; R = 1 m; l = 0,5 m; f = 0,2 và $g = 10$ m.s^{-2}.

Cho $(O; x, y, z)$ là một hệ quy chiếu gắn với xe tải. O nằm ở đầu mút của cái chèn, (Ox) hướng lên trên theo đường thẳng có độ nghiêng cao nhất của cái chèn, (Oy) hướng lên trên vuông góc với (Ox) trong mặt phẳng thẳng đứng và (Oz) là nằm ngang, vuông góc với mặt phẳng của sơ đồ.

1) Tính khoảng cách $l_0 = OA$ theo hàm của R và của α sau đó áp dụng tính số.

2) Xe khởi động, lấy gia tốc không đổi a ($a > 0$). Giả thiết rằng cái chèn và ống được giữ cân bằng trên sàn xe tải.

a) Chứng minh rằng ống thực tế được giữ đứng yên trên sàn xe nếu gia tốc a không quá một giá trị a_1 nào đó mà ta sẽ tính ra. Tính áp dụng số.

b) Chứng tỏ rằng chính cái chèn cũng đứng yên nếu f lớn hơn một giá trị f_1 nào đó mà ta phải xác định. Nghiệm lại rằng với các trị số cho ở trên, thực tế là có được $f > f_1$.

3) Giả sử là $f > f_1$ và cái chèn đứng yên trên sàn xe.

a) Ở thời điểm ban đầu $t = 0$, xe tải khởi động với gia tốc không đổi $a > a_1$.

α) Giả sử là ống lăn không trượt trên cái chèn, tính gia tốc $\ddot{x}_1$ của quán tâm của ống (trong hệ quy chiếu $(O; x, y, z)$ gắn với xe tải).

β) Chứng tỏ rằng chỉ có thể lăn không trượt nếu gia tốc a của xe tải dưới một a_2 nào đó mà ta cần phải xác định. Áp dụng để tính số.

γ) Chứng tỏ rằng cái chèn thực tế bất động trên sàn xe nếu gia tốc a dưới một giá trị a_3 nào đó mà ta phải xác định.

Áp dụng để tính số.

δ) Giả thiết là $a_1 < a < \text{Inf}(a_2 a_3)$ *(nghĩa là giá trị nhỏ hơn trong hai giá trị a_2, a_3)*. Pha tăng tốc kéo dài đến thời điểm t_0 và ở thời điểm đó xe có tốc độ v_0. Xác định ở thời điểm t_0, vận tốc $\dot{x}_{10}$ mà quán tâm của ống có được (trong hệ quy chiếu $(O ; x, y, z)$ và chiều dài d_0 mà ống chạy trên cái chèn. Tất nhiên là giả thiết $(d_0 + l_0) \le l$, hãy viết biểu thức của $\dot{x}_{10}$ và d_0 theo hàm của g, a, α và t_0.

b) Từ thời điểm t_0, xe tải giữ nguyên vận tốc v_0 không đổi.

α) Chứng tỏ rằng khi $t > t_0$, ống lăn không trượt trên cái chèn và tính gia tốc $\ddot{x}_2$ của quán tâm của nó (trong hệ quy chiếu $(O; x, y, z)$ gắn với xe tải).

β) Nghiệm rằng cái chèn đứng yên trên sàn xe tải.

γ) Suy ra chiều dài cực đại d_{max} mà ống chạy trên cái chèn.

Rõ ràng là giả thiết $(d_{max} + l_0) \le l$ và hãy biểu diễn d_{max} theo hàm của g, a, α và t_0.

δ) Người lái xe tải muốn có một vận tốc v_0 bằng 60 km.h^{-1}.

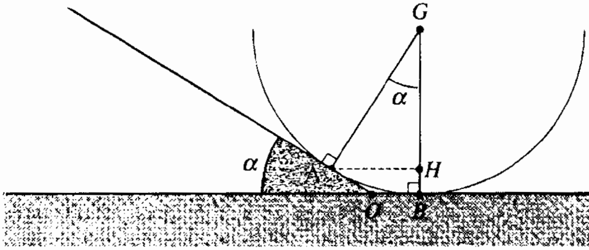
Xác định các trị số của thời gian cực tiểu $t_{0\,min}$ của pha tăng tốc và giá trị cực đại a_{max} cho phép đối với gia tốc a trong pha đó, để cho ống không tụt ra sau cái chèn (rõ ràng là giả thiết $a_{max} < Inf\ (a_2 a_3)$).

BÀI GIẢI

1) Trên sơ đồ dưới đây, ta nhận thấy:

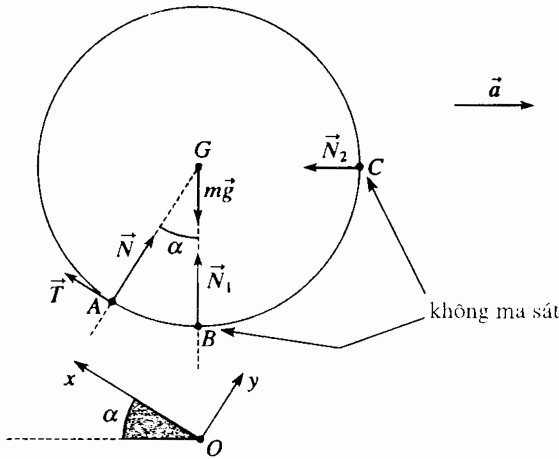
$HB = R(1-\cos\alpha)$ và $l_0 = OA = \dfrac{HB}{\sin\alpha}$; hay $l_o = \dfrac{(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

Áp dụng bằng số : $l_0 = 0{,}087$ m .



2) Cái chèn và ống là đứng yên trên xe tải

a) Vận dụng cho ống định lí về momen động lượng đối với G trong hệ quy chiếu trọng tâm, ta tìm được $T = 0$ (xem sơ đồ dưới đây).



Vận dụng cho ống định lí về tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu không Galilé $(O; x, y, z)$:

$$N + N_1 + N_2 + m\vec{g} - m\vec{a} = \vec{0}$$

Ở giới hạn $a = a_1$ các tiếp xúc ở B và C là không có và $\vec{N}_1 = \vec{N}_2 = \vec{0}$ và chiếu lên (Ox) và (Oy) ta được:

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + ma_1\cos\alpha = 0 \\ N - mg\cos\alpha - ma_1\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất, ta rút ra $a_1 = g\text{tg}\alpha$ và từ phương trình thứ hai $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

Áp dụng số: $a_1 = 1{,}76$ m.s^{-2}.

b) Áp dụng cho cái chèn (khối lượng không đáng kể) định lí về tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu không Galilé $(O; x, y, z)$ (xem sơ đồ sau đây):

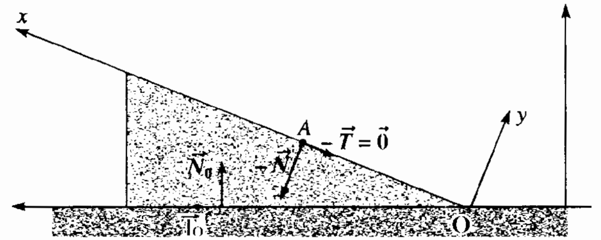
$$\vec{T}_0 + \vec{N}_0 - \vec{N} = \vec{0}$$

vậy khi chiếu:

- lên đường nằm ngang $T_0 + N\sin\alpha = 0$
- lên đường thẳng đứng $N_0 - N\cos\alpha = 0$

Cái chèn giữ cố định nếu $|T_0| \le f|N_0|$, tức là nếu $f \ge f_1 = \text{tg}\alpha$

Áp dụng số : $f_1 = \text{tg}\alpha = 0{,}176 \le f = 0{,}2$.



3) Cái chèn cố định. Ống lăn không trượt.

a) $a > a_1$, các tiếp xúc ở B và C đều không có.

α) Áp dụng cho ống:

- định lí tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu không Galilé $(O; x, y, z)$:

$$m\ddot{x}_1\vec{u}_x = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} - m\vec{a},$$

Vậy chiếu lên: (Ox) và (Oy):

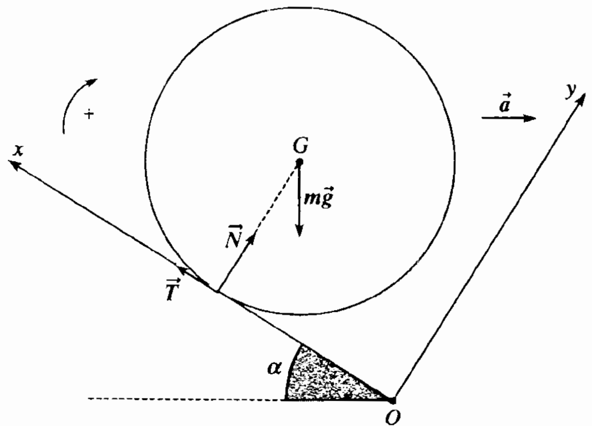
$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = T - mg\sin\alpha + ma\cos\alpha & (1) \\ 0 = N - mg\cos\alpha - ma\sin\alpha & (2) \end{cases};$$

- định lí về momen động lượng ở G, trong hệ quy chiếu trọng tâm, chiếu lên (Oz):

$$J\ddot{\theta} = mR^2\ddot{\theta} = RT \quad (3);$$

- điều kiện lăn không trượt:

$$\dot{x}_1 + R\dot{\theta} = 0 \quad (4).$$



Các hệ thức (1), (3) và (4) dẫn đến $\ddot{x}_1 = \dfrac{1}{2}(a\cos\alpha - g\sin\alpha)$ (5)

β) nhờ các phương trình (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2}m(g\sin\alpha - a\cos\alpha) & (6) \\ N = m(g\cos\alpha + a\sin\alpha) & (7) \end{cases}$$

Có lăn mà không trượt nếu:

$$|T| = -T = \frac{1}{2}m(a\cos\alpha - g\sin\alpha) \le f|N| = fm(g\cos\alpha + a\sin\alpha)$$

(nhớ rằng: $a\cos\alpha - g\sin\alpha > 0$ nếu $a > a_1$), từ đó :

$$a \le a_2 = g\left(\frac{\sin\alpha + 2f\cos\alpha}{\cos\alpha - 2f\sin\alpha}\right)$$

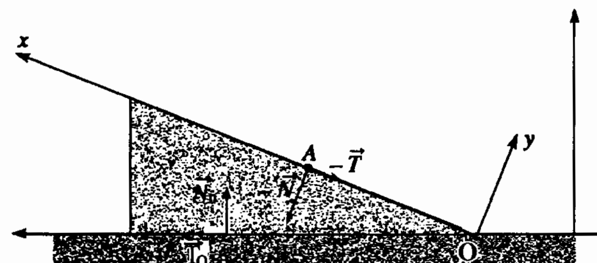
(áp dụng số cho $\cos\alpha > 2f\sin\alpha$).

Ta có thể nghiệm $a_2 > a_1$

Áp dụng số: $a_2 = 6,20\ \text{m.s}^{-2}$ (giá trị "cực lớn").

γ) Áp dụng cho cái chèn (khối lượng không đáng kể) định lí tổng hợp động lực trong hệ quy chiếu không galilé (*O; x, y, z*):

$$\vec{N}_0 + \vec{T}_0 - \vec{T} - \vec{N} = \vec{O}.$$



Vậy khi chiếu

- lên đường nằm ngang $T_0 + N\sin\alpha - T\cos\alpha = 0$;
- lên đường thẳng đứng $N_0 - N\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$

Từ đó dùng các hệ thức (6) và (7) :

$$T_0 = T\cos\alpha - N\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}m(g\sin\alpha - a\cos\alpha)\cos\alpha - m(g\cos\alpha + a\sin\alpha)\sin\alpha$$

$$= -m\left[g\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} + a\left(\frac{\cos^2\alpha}{2} + \sin^2\alpha\right)\right] \quad (8);$$

$$N_0 = T\cos\alpha - N\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}m(g\sin\alpha - a\cos\alpha)\sin\alpha - m(g\cos\alpha + a\sin\alpha)\cos\alpha$$

$$= m\left[g\left(\frac{\sin^2\alpha}{2} + \cos^2\alpha\right) + a\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right] \quad (9).$$

Cái chèn vẫn đứng yên trên xe nếu $|T_0| \le f|N_0|$ tức là khi

$$a \le a_3 = g\left(\frac{f(\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - f\sin\alpha\cos\alpha}\right).$$

(ta có thể nghiệm lại rằng tử số và mẫu số từng cái riêng đều là dương).

Áp dụng số: $a_3 = 2,24\ \text{m.s}^{-2}$.

δ) Trong suốt cả pha tăng tốc, ống lăn không trượt trên cái chèn, từ đó:

$$\dot{x}_{10} = \ddot{x}_1 t_0 = \frac{1}{2}(a\cos\alpha - g\sin\alpha)t_0;$$

$$d_0 = \frac{1}{2}\ddot{x}_1 t_0^2 = \frac{1}{4}(a\cos\alpha - g\sin\alpha)t_0^2;$$

b) Khi $t > t_0$, xe dịch chuyển với vận tốc không đổi: (*O; x, y, z*) là hệ galilé.

α) Giả thiết rằng ống lăn không trượt trên cái chèn và ta lại lấy các hệ thức (5), (6) và (7) của các câu hỏi 3) a) α) và β) trong đó ta cho $a = 0$:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{2}g\sin\alpha;\ T = \frac{1}{2}mg\sin\alpha;\ N = mg\cos\alpha.$$

Giả thiết ống lăn không trượt là đúng nếu $|T| \le f|N|$ điều này dẫn đến $\text{tg}\alpha \le 2f$.

Điều kiện này luôn luôn được nghiệm đúng vì giả thiết $f \ge f_1 = \text{tg}\alpha$.

β) Lại xét các biểu thức (8) và (9) trong đó ta cho $a = 0$

$$T_0 = -\frac{1}{2}mg\sin\alpha\cos\alpha \text{ và } N_0 = mg\left(\frac{\sin^2\alpha}{2} + \cos^2\alpha\right)$$

Cái chèn vẫn giữ đứng yên trên xe tải nếu $|T_0| \le f|N_0|$ tức là nếu:

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} \le f\left(\frac{\sin^2\alpha}{2} + \cos^2\alpha\right) \text{ vậy } \frac{\text{tg}\alpha}{2 + \text{tg}^2\alpha} \le f$$

điều này luôn luôn được nghiệm đúng vì theo giả thiết $f \ge \tan\alpha$.

γ) $\ddot{x}_2 = -\frac{1}{2}g\sin\alpha$ dẫn đến, có để ý tới các điều kiện ở thời điểm t_0 :

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}g\sin\alpha(t - t_0) + \dot{x}_{10};$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}g\sin\alpha(t - t_0)^2 + \dot{x}_{10}(t - t_0) + d_0.$$

x_2 là cực đại khi $\dot{x}_2 = 0$, điều này xảy ra ở thời điểm t_1 xác định bởi:

$$(t_1 - t_0) = \frac{2\dot{x}_{10}}{g\sin\alpha}.$$

Ta rút ra: $$d_{max} = \frac{\dot{x}_{10}}{g\sin\alpha} + d_0$$

và, thay thế $\dot{x}_{10}$ và d_0 bởi các giá trị của chúng:

$$d_{max} = \frac{t_0^2}{4}a\cos\alpha\left(\frac{a\cos\alpha}{g\sin\alpha} - 1\right).$$

δ) $d_{max} = l - l_0$ với $v_0 = at_0 = a_{max}t_{0\,min}$, từ đó :

$$l - l_0 = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{4g\sin\alpha} - \frac{v_0 t_{0\,min}}{4}\cos\alpha$$

Ta rút ra: $t_{0\,min} = \frac{v_0\cos\alpha}{g\sin\alpha} - \frac{4(l - l_0)}{v_0\cos\alpha}$ và $a_{max} = \frac{v_0}{t_{0\,min}}$

vậy $v_0 = 16,67\ \text{m.s}^{-1}$; $t_{0\,min} = 9,35\text{s}$; $a_{max} = 1,78\ \text{m.s}^{-2}$.

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu :
PHẠM QUANG TRỰC
Biên tập tái bản :
PHÙNG THANH HUYỀN
Trình bày bìa :
ĐOÀN HỒNG
Sửa bản in :
PHẠM QUANG TRỰC
Chế bản :
ĐOÀN VIỆT QUÂN

CƠ HỌC VẬT RẮN

Mã số: 7K475T6 - DAI

In 1000 bản, khổ 19 x 26,5 cm tại Công ty cổ phần In Phúc Yên

Số xuất bản: 194 - 2006/CXB/9 - 323/GD

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006

CƠ HỌC VẬT RẮN

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Giá: 22.500đ